

Die Elemente
der
analytischen Dioptrik

von

Dr. Ad. Weifs,

Professor der höhern Mathematik und Physik am kgl. Polytechnikum zu Nürnberg.

Nürnberg.

J. Ludw. Schmid's Verlag.

1857.

Math. A. 321¹² Weiss.

40

Die Philosophie

analytischen Philosophie

Dr. G. G. G.

Lehrstuhl für Philosophie

Lehrstuhl

Lehrstuhl

Lehrstuhl

Die Elemente

der

analytischen Dioptrik

von

Dr. Ad. Weifs,

Professor der höhern Mathematik und Physik am kgl. Polytechnikum zu Nürnberg.

Nürnberg.

J. Ludw. Schmid's Verlag.

1857.

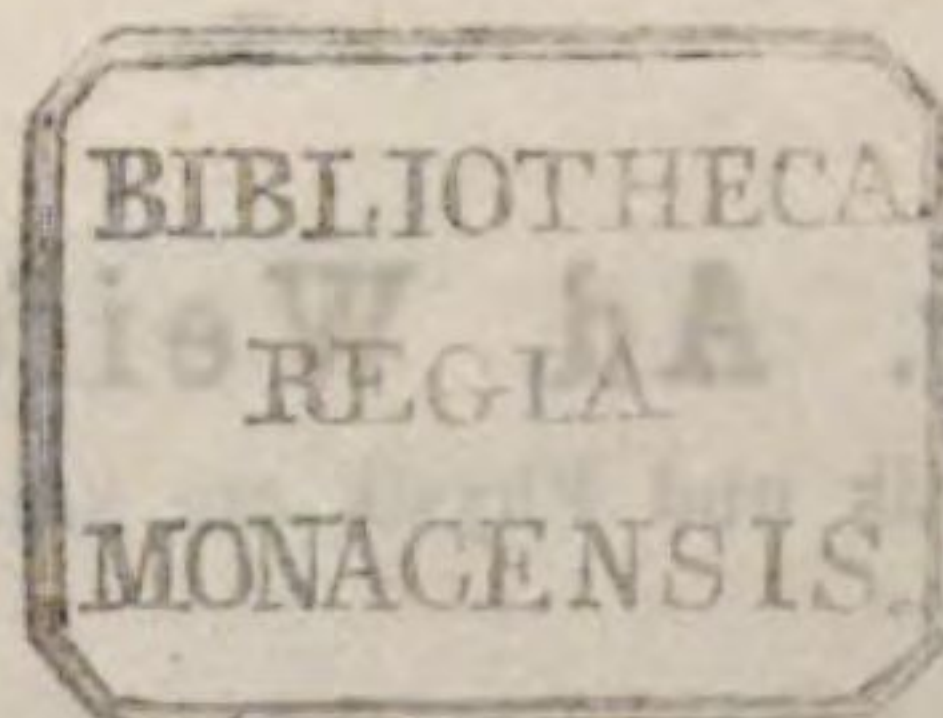
ct = 100.

Die Elemente

von

analytischen Dioptrik

von



Druck von Fr. Campe & Sohn.

Nürnberg.

Verlag von Fr. Campe & Sohn.

1827

V o r w o r t.

Damit das Studium, wie auch die Kritik von dem vorliegenden Werk möglichst erleichtert werde, sei es gestattet, an seine Spitze eine kurze vergleichende Zusammenstellung seines Inhaltes zu setzen.

Die Abtheilung A enthält mehrere in der optischen Abhandlung selbst nöthige mathematische Sätze und umfaßt trotz ihrer Kürze in größter Allgemeinheit die sämmtlichen hieher gehörigen, von Euler, Gaußs, Kramp, Möbius und Stern gefundenen Resultate, und damit auch gewissermaßen die Elemente der Lehre von den Kettenbrüchen. Es war mir zunächst bloss um den von Euler in den Nov. comment. acad. Petrop. IX. bewiesenen Satz, der als specieller Fall in unserer Gleichung (10) enthalten ist, zu thun, da sich aber die übrigen bei dem von mir eingeschlagenen Wege so überaus leicht und elementar ergeben haben, so konnte ich nicht umhin, sie hier mitaufzunehmen. Der genannte Satz drängt sich bei den optischen Betrachtungen nicht gerade unmittelbar in der Form eines Kettenbruches auf, sondern in der eines Systems von Gleichungen. Es scheint dieses aber auch der eigentlichen Natur desselben angemessen zu sein, weil gerade in dieser Form betrachtet die Beweise so äußerst leicht und einfach werden. Ich darf gern gestehen, daß mich diese Einfachheit selbst überraschte, und ich hoffe ihretwegen einige Anerkennung von Seite der Mathematiker zu erndten.

Die Abschnitte I. und II. der Abtheilung B sind der von Gaußs in „seinen optischen Untersuchungen“ eingehaltenen Darstellung nachgebildet; dabei sind hier jedoch die Beweisgründe in streng analytischer Form beigefügt, auch erlaubte es die allgemeinere Form der Gleichung A (10) die gewöhnlichen Parameter für die Gleichungen der Geraden beizubehalten. Im genannten Abschnitte wird die Lage des durch ein System von centrirt mit einander verbundenen brechenden Flächen gehenden Strahls aus der Lage des eintretenden und aus drei die optische und räumliche Beschaffenheit des Apparates vertretenden Größen bestimmt. Von hier ab aber darf ich sowohl die Art und Weise der Darstellung sowie auch viele der erhaltenen Resultate als dem Werk eigenthümlich angehörig bezeichnen und habe deshalb auch die Verantwortung dafür allein zu übernehmen.

Der Abschnitt III. behandelt die Strahlen, die mit der optischen Ebene eine gemeinschaftliche Axe haben und gibt in kurzer Weise Resultate für diesen speciellen Fall an die Hand, die sogleich im folgenden Abschnitt in größter Allgemeinheit auf anderem Wege sichtbar werden. — Schon in diesem Abschnitt stößt man nothwendig auf die zwei so ausgezeichneten Punkte, die mit der optischen Wirkung eines jeden Systems auftreten, nämlich den Brennpunkt

und Hauptpunkt. Die Sache selbst wird es rechtfertigen, daß ich den Namen Hauptpunkt*) einem andern Punkt, als dem von Gauß sogenannten, vindicare, letzterer ist der in gegenwärtiger Abhandlung später unter dem Namen Congruenzpunkt vorkommende.

Der Abschnitt IV. zeigt in rein analytischer Methode die Nothwendigkeit des Entstehens der Bilder und der Bestimmungsgrößen derselben, die optischen Cardinalpunkte und die eigentliche Definition der beiden Brennebenen. Die von anderwärts her schon bekannten Sätze in §. 15, sowie die, wie ich glaube, neue Constructions-methode von §. 17, welche wohl alle sonstigen an Kürze und Allgemeinheit übertreffen dürfte, ergeben sich als einfache Folgerungen.

Einer besondern Würdigung empfehle ich den Abschnitt V., zumal er in den Schlussformeln (43), (44) und (45) alles, was in Bezug auf zusammengesetzte Apparate nur zu wissen nöthig ist, in einer Allgemeinheit und Eleganz gibt, wie sie nur immer gewünscht, ja kaum von vornherein geahnt werden möchte. Der Schluss von V. §. 26 gibt die Erklärung für das, wenn auch minder wichtige, doch immerhin interessante Verhalten eines Apparates in zwei diametral entgegengesetzten Lagen.

Im VI. Abschnitt suchte ich das bereits gewonnene Material auf die gewöhnlich vorkommenden optischen Apparate anzuwenden. In §. 26 findet man dann auch die von Gauß gefundenen Beziehungen der Wirkung eines Systems zu der einer einzigen Linse oder Fläche. Bei der Berechnungsweise des Auges habe ich, wie gehörigen Orts bemerkt ist, die von Listing und Helmholtz gegebenen Daten benützt. Die Formeln der relativen Vergrößerung in §. 36 dürften wohl einige Betrachtung verdienen und die am Schlusse dieses §. aufgedeckte so merkwürdige Eigenschaft des Fernrohrs, das man sehr leicht durch den Versuch ganz bestätigt findet, war mir bisher unbekannt.

Der Abschnitt VII. weicht von allen bisherigen Darstellungen, selbst einschliesslich der Principien, auf die er fundamentirt ist, so sehr ab, daß ich gerade hierauf die Aufmerksamkeit der Optiker am meisten gerichtet wissen möchte; dabei muß ich bekennen, daß mir dieser Abschnitt unsägliche Mühe machte, bis es mir gelang, die bis jetzt gänzlich fehlenden und doch gewiß so wichtigen Formeln für das Gesichtsfeld eines optischen Apparats, sowie sie nun in (72) enthalten sind, zu gewinnen.

Im VIII. Abschnitt endlich suchte ich durch einige ganz specielle Beispiele die Anwendung namentlich der zunächst vorher gefundenen Formeln zu versinnlichen und es dürfte dieses eine nicht unwillkommene Beigabe zu dem Ganzen sein.

Im Falle die vorliegende Schrift nicht ganz ohne Berücksichtigung bleiben sollte, oder, wenn sie sich gar, zur Aufmunterung eines vielfach niedergedrückten Muthes, einige Anerkennung erwerben würde, so folgt in ähnlicher Weise, und diesem Theil entsprechend behandelt, das wichtige Kapitel über die durch die chromatischen und sphärischen Abweichungen bedingten Wirkungen der Apparate.

*) Es ist dies der, meines Wissens, nach Listing benannte „Knotenpunkt“.

A.

Analysis eines Systems von trinomischen (linearen) Gleichungen.

§. 1.

Gegeben ist das System folgender μ Gleichungen:

$$\begin{aligned} z_\mu &= p_\mu z_{\mu-1} + q_{\mu-1} z_{\mu-2} \\ z_{\mu-1} &= p_{\mu-1} z_{\mu-2} + q_{\mu-2} z_{\mu-3} \\ z_{\mu-2} &= p_{\mu-2} z_{\mu-3} + q_{\mu-3} z_{\mu-4} \\ &\vdots \\ z_{i+1} &= p_{i+1} z_i + q_i z_{i-1} \\ z_i &= p_i z_{i-1} + q_{i-1} z_{i-2} \\ z_{i-1} &= p_{i-1} z_{i-2} + q_{i-2} z_{i-3} \\ &\vdots \\ z_3 &= p_3 z_2 + q_2 z_1 \\ z_2 &= p_2 z_1 + q_1 z_0 \\ z_1 &= p_1 z_0 + q_0 z_{-1} \end{aligned}$$

Die Gröſſen p und q denken wir uns gegeben und nennen sie kurzweg Coefficienten, während die Gröſſen z durch die Gleichungen zu bestimmen sind und deſſhalb auch Bestimmungsgröſſen heißen ſollen. Da die μ Gleichungen $\mu + 2$ z enthalten, ſo ſind zwei davon willkürlich und die übrigen können von dieſen zwei abhängig gemacht werden. Am einfachſten laſſen ſich die z durch die beiden rechts ſtehenden Bestimmungsgröſſen der letzten Gleichung des Systems auswerthen, indem es hiezu nur einer ſucceſſiven Substitution der letztern bereits erhaltenen Gleichungen in die nächſt vorhergehenden bedarf; ſo iſt z. B.

$$\begin{aligned} z_1 &= p_1 z_0 + q_0 z_{-1} \\ z_2 &= (p_2 p_1 + q_1) z_0 + q_0 p_2 z_{-1} \\ z_3 &= (p_3 p_2 p_1 + p_3 q_1 + p_1 q_2) z_0 + q_0 (p_2 p_3 + q_2) z_{-1} \end{aligned}$$

und ſo fort, überaus leicht zu finden.

Zum Zeichen, daſs eine Bestimmungsgröſſe durch die zwei rechts ſtehenden z einer ſpättern Gleichung des Systems auszuwerthen iſt, ſchreibt man über ihr Zeichen den Index des links ſtehenden z dieſer Gleichung. Also bedeuten $^i z_\mu$, $^i z_i$ die Ausdrücke für z_μ , z_i in z_0 und z_{-1} , dagegen $^i z_\mu$, wo $\mu > i$, den Ausdruck für z_μ in z_{i-1} und z_{i-2} ausgewerthet.

§. 2.

Es iſt jedenfalls

$$^i z_\mu = A z_{i-1} + A' z_{i-2},$$

wo A und A' Aggregate von Combinationen ſind, welche nach einem gewiſſen Geſetze aus den

entsprechenden Coeffizienten gebildet sind. Einer aufmerksamen Betrachtung entgeht gleichfalls nicht, daß in A' der Factor q_{i-1} allen Posten gemein sein muß, so daß man auch schreiben kann

$${}^i z_\mu = A z_{i-1} + q_{i-1} B z_{i-2}.$$

Die Factoren A und B sind aber nun ganz unabhängig von q_{i-1} und man kann erstern offenbar erhalten, wenn man in der Gleichung z_i das q_{i-1} der Null gleich nimmt, dann heißen die zwei letzten Gleichungen:

$$z_{i+1} = p_{i+1} z_i + q_i z_{i-1}$$

$$z_i = p_i z_{i-1}$$

und offenbar ist nun A eine Function aller p von p_i bis p_μ und aller q von q_i bis $q_{\mu-1}$, die wir so bezeichnen wollen:

$$A = F(p_i, p_{i+1}, \dots, p_\mu; q_i, q_{i+1}, \dots, q_{\mu-1})$$

oder kurz

$$A = {}^i F_\mu.$$

Die Coeffizienten p_i und q_i können in B nicht vorkommen, letzteres bleibt also das Nämliche, wenn jene der Null gleich gesetzt werden, thut man dies und nimmt q_{i-1} momentan $= 1$ an, so heißen die letzten Gleichungen:

$$z_{i+2} = p_{i+2} z_{i+1} + q_{i+1} z_i$$

$$z_{i+1} = p_{i+1} z_{i-2}$$

und es ist jetzt augenscheinlich, daß durch die successiven Substitutionen der Ausdruck für B sich ganz ebenso aus den Coeffizienten $p_{i+1} \dots p_\mu$ und $q_{i+1} \dots q_{\mu-1}$ zusammensetzt, wie A aus $p_i \dots p_\mu$ und $q_i \dots q_{\mu-1}$ gebildet ist, man deshalb schreiben kann

$$B = {}^{i+1} F_\mu = F(p_{i+1}, p_{i+2}, \dots, p_\mu; q_{i+1}, q_{i+2}, \dots, q_{\mu-1}),$$

und es erhellt auch, daß aus ${}^i F_{\mu-1}$ der Ausdruck ${}^{i+1} F_\mu$ gewonnen wird, wenn man im erstern sämtliche Indices um 1 erhöht.

Setzt man für A und B die neuen Bezeichnungen, so ist

$$(1.) \dots \dots \dots {}^i z_\mu = {}^i F_\mu z_{i-1} + q_{i-1} {}^{i+1} F_\mu z_{i-2}.$$

Da ${}^i z_i = p_i z_{i-1} + q_{i-1} z_{i-2}$, so gilt diese Gleichung auch dann, wann $\mu = i$ ist, sobald wir nur

$$(2.) \dots \dots \dots {}^i F_i = p_i \text{ und } {}^{i+1} F_i = 1$$

annehmen.

§. 3.

Es hält nun auch nicht schwer, nachzuweisen, wie ein jedes z durch zwei andere beliebige z auszudrücken ist. Soll z. B. die Relation zwischen z_μ, z_λ und z_x , wo μ, λ und x größer als i sind, aufgefunden werden, so hat man

$${}^i z_\mu = {}^i F_\mu \cdot z_{i-1} + q_{i-1} {}^{i+1} F_\mu z_{i-2}$$

$${}^i z_\lambda = {}^i F_\lambda \cdot z_{i-1} + q_{i-1} {}^{i+1} F_\lambda z_{i-2}$$

$${}^i z_x = {}^i F_x \cdot z_{i-1} + q_{i-1} {}^{i+1} F_x z_{i-2}$$

Eliminirt man hieraus z_{i-1} und $q_{i-1} \cdot z_{i-2}$, so erhält man:

$${}^i z_\mu \{ {}^i F_\lambda {}^{i+1} F_x - {}^{i+1} F_\lambda {}^i F_x \} - {}^i z_\lambda \{ {}^i F_\mu {}^{i+1} F_x - {}^{i+1} F_\mu {}^i F_x \} + {}^i z_x \{ {}^i F_\mu {}^{i+1} F_\lambda - {}^{i+1} F_\mu {}^i F_\lambda \} = 0 \quad \dots (3.)$$

und es können nun in dieser Gleichung zwei der vorkommenden z willkürlich angenommen und das dritte daraus bestimmt werden.

§. 4.

Wir wollen sogleich einige Relationen der F zu entwickeln suchen, von denen man in der Analyse hie und da Gebrauch macht und worunter auch einige von großer Bedeutung für die folgenden Untersuchungen sind.

Nach 1) ist:

$${}^i z_{x-1} = {}^i F_{x-1} \cdot {}^i z_{i-1} + q_{i-1} {}^{i+1} F_{x-1} {}^i z_{i-2}, \text{ ebenso}$$

$${}^i z_{x-2} = {}^i F_{x-2} {}^i z_{i-1} + q_{i-1} {}^{i+1} F_{x-2} {}^i z_{i-2} \text{ und offenbar ist auch}$$

$${}^x z_\mu = {}^x F_\mu \cdot {}^x z_{x-1} + q_{x-1} {}^{x+1} F_\mu {}^x z_{x-2},$$

wo aber $x-2 \leq i$, also $x \leq i+2$ und $\mu \leq x$ sein muß.

Ferner ist aber auch jedenfalls:

$${}^i z_\mu = {}^x F_\mu {}^i z_{x-1} + q_{x-1} {}^{x+1} F_\mu {}^i z_{x-2},$$

setzt man in diese Gleichung die Werthe von ${}^i z_{x-1}$ und ${}^i z_{x-2}$, so erhält man:

$${}^i z_\mu = ({}^x F_\mu {}^i F_{x-1} + q_{x-1} {}^{x+1} F_\mu {}^i F_{x-2}) {}^i z_{i-1} + q_{i-1} ({}^x F_\mu {}^{i+1} F_{x-1} + q_{x-1} {}^{x+1} F_\mu {}^{i+1} F_{x-2}) {}^i z_{i-2}$$

Dieses mit der Gleichung (1) verglichen gibt die Sätze:

$$\left. \begin{aligned} {}^i F_\mu &= {}^x F_\mu {}^i F_{x-1} + q_{x-1} {}^{x+1} F_\mu {}^i F_{x-2}, \\ {}^{i+1} F_\mu &= {}^x F_\mu {}^{i+1} F_{x-1} + q_{x-1} {}^{x+1} F_\mu {}^{i+1} F_{x-2}, \end{aligned} \right\} \dots (4.)$$

welche Gleichung gilt, wenn $\mu \leq x$ und $x \leq i+2$ ist.

Setzt man in erster Gleichung $x=\mu$ und berücksichtigt die Definitionen in (2) so ist:

$${}^i F_\mu = p_\mu {}^i F_{\mu-1} + q_{\mu-1} {}^i F_{\mu-2} \dots (5.)$$

und gilt für $\mu \leq i+1$.

Setzt man in zweiter Gleichung $i=x-2$ und berücksichtigt (2), so erhält man:

$${}^{x-1} F_\mu = p_{x-1} {}^x F_\mu + q_{x-1} {}^{x+1} F_\mu \dots (6.)$$

und gilt für $\mu \leq x$.

Ferner ist aus (4) für den Fall als $\mu \leq x$ und $x \leq i+1$

$${}^i F_\mu = {}^x F_\mu {}^i F_{x-1} + q_{x-1} {}^{x+1} F_\mu {}^i F_{x-2}.$$

Ebenso ist, wenn $\lambda \leq x$; $x \leq i+1$

$${}^i F_\lambda = {}^x F_\lambda {}^i F_{x-1} + q_{x-1} {}^{x+1} F_\lambda {}^i F_{x-2}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt durch Elimination der GröÙe ${}^i F_{x-1}$ sehr einfach:

$$a) \quad {}^i F_\mu {}^x F_\lambda - {}^x F_\mu {}^i F_\lambda = -q_{x-1} \{ {}^x F_\mu {}^{x+1} F_\lambda - {}^{x+1} F_\mu {}^x F_\lambda \} {}^i F_{x-2};$$

aus dieser Gleichung dagegen ist selbst wieder, wenn $i=x-1$ gesetzt wird:

$${}^{x-1} F_\mu {}^x F_\lambda - {}^x F_\mu {}^{x-1} F_\lambda = -q_{x-1} \{ {}^x F_\mu {}^{x+1} F_\lambda - {}^{x+1} F_\mu {}^x F_\lambda \},$$

oder wenn man will:

$$c) \quad {}^{x+1}F_{\mu} {}^{x+2}F_{\lambda} - {}^{x+2}F_{\mu} {}^{x+1}F_{\lambda} = -q_{x+1} \{ {}^{x+2}F_{\mu} {}^{x+3}F_{\lambda} - {}^{x+3}F_{\mu} {}^{x+2}F_{\lambda} \}$$

$$\lambda^{-1}F_{\mu}{}^{\lambda}F_{\lambda}-{}^{\lambda}F_{\mu}{}^{\lambda-1}F_{\lambda}=-q_{\lambda-1}\{{}^{\lambda}F_{\mu}{}^{\lambda+1}F_{\lambda}-{}^{\lambda+1}F_{\mu}{}^{\lambda}F_{\lambda}\}=-q_{\lambda-1}\{{}^{\lambda}F_{\mu}-{}^{\lambda+1}F_{\mu}\cdot p_{\lambda}\};$$
$${}^{\lambda}F_{\mu} - p_{\lambda} {}^{\lambda+1}F_{\mu} = q_{\lambda} {}^{\lambda+2}F_{\mu};$$
$$*) \quad \lambda^{-1} F_{\mu} \lambda F_{\lambda} - \lambda F_{\mu} \lambda^{+1} F_{\lambda} = -q_{\lambda-1} q_{\lambda} \lambda^{+2} F_{\mu}.$$
$${}^iF_\mu {}^x F_\lambda - {}^x F_\mu {}^i F_\lambda = (-q_{x-1} \times -q_x \times -q_{x+1} \cdots \cdots -q_{\lambda-1} \times q_\lambda) {}^i F_{x-2} {}^{\lambda+2} F_\mu$$

welche Relation gilt, wenn $\mu > \lambda$; $\lambda \leq x$; $x > i$.

$$(8.) \quad \dots iF_{\mu} i^{+1}F_{\lambda} - i^{+1}F_{\mu} iF_{\lambda} = (-1)^{\lambda-i} \cdot q_i q_{i+1} \dots q_{\lambda-1} q_{\lambda} \cdot {}^{\lambda+2}F_{\mu},$$
$$(9.) \quad \dots \quad {}^iF_{\lambda+1} {}^x F_{\lambda} - {}^x F_{\lambda+1} {}^i F_{\lambda} = (-1)^{\lambda-x+1} \cdot q_{x-1} q_x \cdot q_{x+1} \dots q_{\lambda} {}^i F_{x-2},$$
$$(10.) \quad \dots \quad {}^i F_{\lambda+1} {}^{i+1} F_{\lambda} - {}^{i+1} F_{\lambda+1} {}^i F_{\lambda} = (-1)^{\lambda-i} \cdot q_i q_{i+1} q_{i+2} \dots q_{\lambda}.$$
$$(11.) \quad \dots \quad x+2F_{\lambda}^i z_{\mu} = x+2F_{\mu}^i z_{\lambda} + (-1)^{\lambda-x+1} q_{x+1} q_{x+2} \dots q_{\lambda} \lambda+2F_{\mu}^i z_x,$$

§. 5.

$$z_u = p_1 z_{u-1} + q_1 z_{u-2}$$

$$z_{\mu-1} = p_2 z_{\mu-2} + q_2 z_{\mu-3}$$

$$z_{u-2} = p_3 z_{u-3} + q_3 z_{u-4}$$

$$z_{u-i+2} = p_{i-1} z_{u-i+1} + q_{i-1} z_{u-i}$$

$$z_{\mu-i+1} = p_i \quad z_{\mu-i} \quad + \quad q_i \quad z_{\mu-i-1}$$

$$z_{\mu-i} = p_{i+1} z_{\mu-i-1} + q_{i+1} z_{\mu-i-2}$$

$$z_3 = p_{u-2} z_2 + q_{u-2} z_1$$

$$z_2 = p_{\mu-1} z_1 + q_{\mu-1} z_0$$

$$z_1 = p_u \quad z_0 + q_u \quad z_{-1} ,$$

so ist hier

$${}^1z_{\mu-i+1} = {}^1F(p_\mu, p_{\mu-1} \dots p_i; q_{\mu-1}, q_{\mu-2}, \dots q_i) z_0 \\ + q_\mu {}^1F(p_{\mu-1}, p_{\mu-2} \dots p_i; q_{\mu-2}, \dots q_i) z_{-1}.$$

Der Factor von z_0 ist aus denselben Elementen zusammengesetzt, wie der Factor von z_{i-1} im Ausdruck für ${}^i z_\mu$ des §. 2. Beide Ausdrücke stellen ihre Posten auch ganz in gleicher Weise zusammen, nur kommen in letzterem die Elemente in umgekehrter Ordnung zur Verwendung. Wir wollen deshalb den letztern Ausdruck mit ${}^\mu F_i$ bezeichnen, und analog den Factor von z_{-1} mit ${}^{\mu-1} F_i$, so dafs wir haben

$${}^1z_{\mu-i+1} = {}^\mu F_i z_0 + q_\mu {}^{\mu-1} F_i z_{-1}.$$

Ebenso ist:

$${}^1z_{\mu-i} = {}^\mu F_{i+1} z_0 + q_\mu {}^{\mu-1} F_{i+1} z_{-1}$$

und

$${}^1z_{\mu-i-1} = {}^\mu F_{i+2} z_0 + q_\mu {}^{\mu-1} F_{i+2} z_{-1}.$$

Jedenfalls aber ist aus dem System selbst zu nehmen:

$${}^1z_{\mu-i+1} = p_i {}^1z_{\mu-i} + q_i {}^1z_{\mu-i-1},$$

hier die Werthe für ${}^1z_{\mu-i}$ und ${}^1z_{\mu-i-1}$ substituirt gibt:

$${}^1z_{\mu-i+1} = (p_i {}^\mu F_{i+1} + q_i {}^\mu F_{i+2}) z_0 + q_\mu (p_i {}^{\mu-1} F_{i+1} + q_i {}^{\mu-1} F_{i+2}) z_{-1},$$

dieses mit der zuerst erhaltenen Formel für ${}^1z_{\mu-i+1}$ verglichen, zeigt:

$${}^\mu F_i = p_i {}^\mu F_{i+1} + q_i {}^\mu F_{i+2}.$$

Aus Formel (6) folgt, wenn dort $x-1=i$ ist:

$${}^i F_\mu = p_i {}^{i+1} F_\mu + q_i {}^{i+2} F_\mu.$$

Wäre nun noch bekannt, dafs

$${}^{i+1} F_\mu = {}^\mu F_{i+1} \text{ und } {}^{i+2} F_\mu = {}^\mu F_{i+2},$$

so wäre nun auch ${}^i F_\mu = {}^\mu F_i$. Aber leicht ist nachzuweisen, dafs

$${}^\mu F_\mu = {}^\mu F_\mu; {}^{\mu-1} F_\mu = {}^\mu F_{\mu-1}$$

und daraus folgt, dafs auch ist ${}^{\mu-2} F_\mu = {}^\mu F_{\mu-2}$ und so fort, endlich ${}^i F_\mu = {}^\mu F_i$, d. h. im Ausdruck ${}^i F_\mu$ ändert sich nichts, wenn man denselben so herstellt, dafs man die Elemente p und q in umgekehrter Ordnung zur Verwendung kommen läßt.

§. 6.

Führt man die in §. 1 erwähnten auf einander folgende Substitutionen wirklich durch, so erhält man:

$${}^1 F_1 = p_1$$

$${}^1 F_2 = p_1 p_2 + q_1$$

$${}^1 F_3 = p_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 + p_3 q_1$$

$${}^1 F_4 = p_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 q_3 + p_1 p_4 q_2 + p_3 p_4 q_1 + q_1 q_3$$

$${}^1 F_5 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 + p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 p_5 q_3 + p_1 p_4 p_5 q_2 + p_3 p_4 p_5 q_1 + p_1 q_2 q_4 + p_3 q_1 q_4 \\ + p_5 q_1 q_3$$

$${}^1 F_6 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 + p_1 p_2 p_3 p_4 q_5 + p_1 p_2 p_3 p_6 q_4 + p_1 p_2 p_5 p_6 q_3 + p_1 p_4 p_5 p_6 q_2 \\ + p_3 p_4 p_5 p_6 q_1 + p_5 p_6 q_1 q_3 + p_3 p_6 q_1 q_4 + p_3 p_4 q_1 q_5 + p_1 p_6 q_2 q_4 + p_1 p_4 q_2 q_5 \\ + p_1 p_2 q_3 q_5 + q_1 q_3 q_5.$$

Wenn man diese Resultate etwas genauer ansieht, und mit einander vergleicht, so erkennt man folgendes Bildungsgesetz:

Der erste Posten von ${}^1F_m$ ist das Produkt sämtlicher p von p_1 bis p_m . Aus diesem Posten gewinnt man die nächstfolgenden dadurch, daß man ein Paar auf einander folgende p wegläßt, und zwar nach einander, so oft als es angeht, für jedes weggelassene Paar aber setzt man q mit dem niedrigeren Index, der in dem Paar bei dem p steht.

Alsdann läßt man in dem Product der p zwei Paar p weg, wo in jedem Paar für sich die Indices auf einander folgen, setzt statt jedem Paar das treffende q , und wiederholt dies, so oft es angeht. Hierauf werden drei Paar p , wo in jedem Paar für sich die Indices auf einander folgen, in dem Product der p weggelassen und dafür die drei entsprechenden q gesetzt u. s. f., bis man zuletzt auf ein Glied kommt, welches lauter q enthält und zwar die Hälfte von der Anzahl der p , die im ersten Glied vorkommen, wenn m eine gerade Zahl ist, oder bis man auf Glieder kommt, die nur noch ein p enthalten, welches der Fall ist, wenn m eine ungerade Zahl ist. Nach diesem Gesetz, dessen Gültigkeit wir nicht weiter beweisen wollen, ist z. B.

$${}^1F_7 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 q_6 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_7 q_5 + p_1 p_2 p_3 p_6 p_7 q_4 + p_1 p_2 p_5 p_6 p_7 q_3 \\ + p_1 p_4 p_5 p_6 p_7 q_2 + p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 q_1 + p_1 p_2 p_3 q_4 q_6 + p_1 p_2 p_5 q_3 q_6 + p_1 p_4 p_5 q_2 q_6 \\ + p_3 p_4 p_5 q_1 q_6 + p_1 p_2 p_7 q_3 q_5 + p_1 p_4 p_7 q_2 q_5 + p_1 p_6 p_7 q_2 q_4 + p_3 p_4 p_7 q_1 q_5 \\ + p_3 p_6 p_7 q_1 q_4 + p_5 p_6 p_7 q_1 q_3 + p_1 q_2 q_4 q_6 + p_3 q_1 q_4 q_6 + p_5 q_1 q_3 q_6 + p_7 q_1 q_3 q_5$$

$${}^1F_8 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6 q_7 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_8 q_6 + p_1 p_2 p_3 p_4 p_7 p_8 q_5 \\ + p_1 p_2 p_3 p_6 p_7 p_8 q_4 + p_1 p_2 p_5 p_6 p_7 p_8 q_3 + p_1 p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 q_2 + p_3 p_4 p_5 p_6 p_7 p_8 q_1 \\ + p_1 p_2 p_3 p_4 q_5 q_7 + p_1 p_2 p_3 p_6 q_4 q_7 + p_1 p_2 p_5 p_6 q_3 q_7 + p_1 p_4 p_5 p_6 q_2 q_7 \\ + p_3 p_4 p_5 p_6 q_1 q_7 + p_1 p_2 p_3 p_8 q_4 q_6 + p_1 p_2 p_5 p_8 q_3 q_6 + p_1 p_4 p_5 p_8 q_2 q_6 \\ + p_3 p_4 p_5 p_8 q_1 q_6 + p_1 p_2 p_7 p_8 q_3 q_5 + p_1 p_4 p_7 p_8 q_2 q_5 + p_3 p_4 p_7 p_8 q_1 q_5 \\ + p_1 p_6 p_7 p_8 q_2 q_4 + p_3 p_6 p_7 p_8 q_1 q_4 + p_5 p_6 p_7 p_8 q_1 q_3 + p_1 p_2 q_3 q_5 q_7 \\ + p_1 p_4 q_2 q_5 q_7 + p_1 p_6 q_2 q_4 q_7 + p_1 p_8 q_2 q_4 q_6 + p_3 p_4 q_1 q_5 q_7 + p_3 p_6 q_1 q_4 q_7 + \\ + p_3 p_8 q_1 q_4 q_6 + p_5 p_6 q_1 q_3 q_7 + p_5 p_8 q_1 q_3 q_6 + p_7 p_8 q_1 q_3 q_5 + q_1 q_3 q_5 q_7$$

§. 7.

Wie die vorstehenden Sätze mit den Elementen der Lehre von den Kettenbrüchen zusammenhängen, ist leicht zu zeigen.

Aus dem System der Gleichungen in §. 1 folgt nämlich ganz einfach:

$$\frac{z_\mu}{z_{\mu-1}} = p_\mu + q_{\mu-1} \frac{z_{\mu-2}}{z_{\mu-1}} = p_\mu + q_{\mu-1} : \frac{z_{\mu-1}}{z_{\mu-2}} \\ \frac{z_{\mu-1}}{z_{\mu-2}} = p_{\mu-1} + q_{\mu-2} \frac{z_{\mu-3}}{z_{\mu-2}} = p_{\mu-1} + q_{\mu-2} : \frac{z_{\mu-2}}{z_{\mu-3}} \\ \frac{z_{\mu-2}}{z_{\mu-3}} = p_{\mu-2} + q_{\mu-3} \frac{z_{\mu-4}}{z_{\mu-3}} = p_{\mu-2} + q_{\mu-3} : \frac{z_{\mu-3}}{z_{\mu-4}} \\ \frac{z_3}{z_2} = p_3 + q_2 \quad \frac{z_1}{z_2} = p_3 + q_2 : \frac{z_2}{z_1} \\ \frac{z_2}{z_1} = p_2 + q_1 \quad \frac{z_0}{z_1} = p_2 + q_1 : \frac{z_1}{z_0} \\ \frac{z_1}{z_0} = p_1 + q_0 \quad \frac{z_{-1}}{z_0} = p_1 + q_0 : \frac{z_0}{z_{-1}}$$

Ist nun $q_0 = 0$ und setzt man in jeden Ausdruck rechts successive die folgenden Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{z_\mu}{z_{\mu-1}} = p_\mu + \frac{q_{\mu-1}}{p_{\mu-1} + \frac{q_{\mu-2}}{p_{\mu-2} + \frac{q_3}{p_3} + \frac{q_2}{p_2} + \frac{q_1}{p_1}}}.$$

Der gewöhnliche Bruch auf der linken Seite ist demnach dem Kettenbruche rechts gleich. Der gewöhnliche Bruch links ist aber nach Gleichung (1):

$$\text{weil } {}^1z_\mu = {}^1F_\mu \cdot z_0 \text{ und } {}^1z_{\mu-1} = {}^1F_{\mu-1} \cdot z_0 \text{ ist, } = \frac{{}^1F_\mu}{{}^1F_{\mu-1}}$$

und es ist also ${}^1F_\mu$ der Zähler, ${}^1F_{\mu-1}$ der Nenner eines Näherungsbruches von dem Kettenbruche rechts und alle vorhergehenden Sätze der F lassen sich nun auf den Kettenbruch selbst beziehen.

B.

Betrachtung der Ablenkung von Centralstrahlen an sphärisch abgegränzten Flächen.

1.

Ablenkung eines Strahls an einer einzigen sphärischen Fläche.

§. 1.

Im Punkt C der Axe der X eines rechtwinkligen Coordinatensystems, sei der Mittelpunkt einer mit dem Radius r beschriebenen Kugelfläche, die im Punkt E von einem Lichtstrahl (dessen Weg eine Gerade ist) getroffen wird. Zieht man durch den Punkt E die Gerade CE , das sogenannte Einfallslloth, so macht dieselbe mit der Axe der X den spitzen Winkel γ , dessen Oeffnung entweder gegen den Anfangspunkt des Systems hin oder von ihm abgewendet ist. Bezeichnen x_0 , y_0 und z_0 die Coordinaten des Eintrittspunktes E , ferner $x=d$ die Abscisse von jenem Schnittpunkt D der Axe und der Kugelfläche, welcher dem Punkt E zunächst liegt, so hat man:

$$x_0 = d \pm r(1 - \cos \gamma),$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn der spitze Winkel gegen den Anfangspunkt gerichtet ist, wenn also Punkt C hinter Punkt D liegt, und das untere im entgegengesetzten Falle. Im ersten Falle trifft der Lichtstrahl auf den erhaben, und im letztern Falle auf den hohl ihm zugewendeten Theil der Kugelfläche. Indem wir für die Folge das Doppelzeichen in den Werth des r legen, behalten wir nur das obere bei.

Im Punkte D denke man sich eine auf der Axe der X senkrechte Ebene, auf welche wir alle durch den Punkt E gehenden Geraden beziehen wollen. Die Gleichungen des in E einfallenden Strahls und des in E abgelenkten Strahls seien:

$$\begin{aligned} y &= \alpha(x-d) + a \\ z &= \beta(x-d) + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \alpha'(x-d) + a' \\ z &= \beta'(x-d) + b' \end{aligned}$$

Da beide Strahlen den Punkt E enthalten, so stehen die Größen a, α, b und β mit a', α', b' und β' in folgenden Beziehungen:

$$(1.) \quad \dots \dots \dots \left. \begin{aligned} y_0 &= \alpha r(1 - \cos \gamma) + a = \alpha' r(1 - \cos \gamma) + a' \\ z_0 &= \beta r(1 - \cos \gamma) + b = \beta' r(1 - \cos \gamma) + b' \end{aligned} \right\}$$

Die Gleichungen des Einfallslotth sind als die einer Geraden, die die beiden Punkte C und E enthält:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{y_0}{r \cos \gamma} (x-d) + \frac{y_0}{\cos \gamma} \\ z &= -\frac{z_0}{r \cos \gamma} (x-d) + \frac{z_0}{\cos \gamma} \end{aligned}$$

Die drei Geraden schneiden jene Ebene, die im Punkt D zur Axe der X senkrecht ist, in den entsprechenden Punkten A, A' und B .

Hiebei sind die Coordinaten:

Des Durchschnittspunktes A vom Wege des einfallenden Strahls $x=d, y=a, z=b$.

" " " A' vom Wege des abgelenkten Strahls $x=d, y=a', z=b'$.

" " " B vom Einfallslotth $x=d, y=\frac{y_0}{\cos \gamma}, z=\frac{z_0}{\cos \gamma}$.

Ferner ist nach den Elementen der analytischen Geometrie:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{A'B} &= \frac{\sqrt{\left(\frac{y_0}{\cos \gamma} - a\right)^2 + \left(\frac{z_0}{\cos \gamma} - b\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{y_0}{\cos \gamma} - a'\right)^2 + \left(\frac{z_0}{\cos \gamma} - b'\right)^2}} = \sqrt{\frac{(y_0 - a \cos \gamma)^2 + (z_0 - b \cos \gamma)^2}{(y_0 - a' \cos \gamma)^2 + (z_0 - b' \cos \gamma)^2}} \\ &= \frac{y_0 - a \cos \gamma}{y_0 - a' \cos \gamma} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{z_0 - b \cos \gamma}{y_0 - a \cos \gamma}\right)^2}{1 + \left(\frac{z_0 - b' \cos \gamma}{y_0 - a' \cos \gamma}\right)^2}} \end{aligned}$$

Nach dem ersten Theile des Fundamentalsatzes über die Ablenkung der Lichtstrahlen haben einfallende und abgelenkte Strahlen eine Ebene, die Einfallsebene, mit dem Einfallslotth gemeinschaftlich. In Folge dessen müssen die Punkte A, A' und B in einer Geraden, welche die Kante der Einfallsebene und unserer Bestimmungsebene in D bildet, liegen.

Aus diesem Grunde ist nach den Elementen der analytischen Geometrie:

$$\frac{\frac{z_0}{\cos \gamma} - b}{\frac{y_0}{\cos \gamma} - a} = \frac{\frac{z_0}{\cos \gamma} - b'}{\frac{y_0}{\cos \gamma} - a'} \quad \text{oder} \quad \frac{z_0 - b \cos \gamma}{y_0 - a \cos \gamma} = \frac{z_0 - b' \cos \gamma}{y_0 - a' \cos \gamma}$$

Also ist:

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{y_0 - a \cos \gamma}{z_0 - a' \cos \gamma} = \frac{\alpha r + a}{\alpha' r + a'}$$

Wir können übrigens oben auch mit $\frac{z_0 - b \cos \gamma}{z_0 - b' \cos \gamma}$ aus der Wurzel fahren, dann erhalten wir:

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{\beta r + b}{\beta' r + b'}$$

In der Einfallsebene liegen die beiden Dreiecke AEB und $A'EB$ und es ist:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{\sin AEB}{\sin BAE}; \quad \frac{A'B}{B'E} = \frac{\sin A'EB}{\sin BA'E}; \quad \frac{AB}{A'B} = \frac{\sin AEB}{\sin A'EB} : \frac{\sin BA'E}{\sin BAE}.$$

AEB ist der sogenannte Einfallswinkel und $A'EB$ der Ablenkungswinkel, und es ist nach dem zweiten Theil des optischen Fundamentalsatzes:

$\frac{\sin AEB}{\sin A'EB} = \frac{n'}{n}$, wobei n den Brechungsexponent des Mittels vor, und n' den Brechungsexponent des Mittels hinter der brechenden Fläche bedeutet, und der Brechungsexponent der atmosphärischen Luft als Einheit angenommen ist. Bei der Reflexion ist $\frac{n'}{n} = -1$. —

Dann aber hat man:

$$(2) \quad \frac{AB}{A'B} = \frac{a + \alpha r}{a' + \alpha' r} = \frac{b + \beta r}{b' + \beta' r} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{\sin BA'E}{\sin BAE}.$$

Für den Fall als man noch $\cos \gamma$ und das Verhältniß

$$\frac{\sin BA'E}{\sin BAE}$$

als bekannt, oder wenigstens in den Größen $a, \alpha, b, \beta, a', \alpha', b', \beta'$ und r ausgewerthet annimmt, sind durch die Gleichungen (1) und (2) die Größen a', α', b' und β' aus den Größen a, α, b, β, n und r zu berechnen und die Aufgabe ist dann ganz allgemein für jeden Fall gelöst.

§. 2.

Sobald als der Weg eines Strahles von der Richtung der Axe wenig verschieden ist, wie dieses bei den sogenannten Centralstrahlen angenommen wird, und nur solche wollen wir vorerst unserer Betrachtung unterwerfen, ist γ ein kleiner Winkel und wir können $\cos \gamma = 1$ setzen unbeschadet eines Fehlers um weniger als das Quadrat von γ .

In diesem Falle stehen dann auch AE und $A'E$ auf der Bestimmungsebene nahezu senkrecht, also sind die Winkel BAE und $BA'E$ von einem rechten Winkel höchstens um den kleinen Winkel δ verschieden und das Verhältniß $\frac{\sin BA'E}{\sin BAE}$ ist nur um weniger als das Quadrat dieser kleinen Gröfse δ von der Einheit entfernt.

Unbeschadet also der Fehler, die weniger betragen, als die Quadrate der kleinen Größen γ und δ , hat man:

$$\frac{a + \alpha r}{a' + \alpha' r} = \frac{b + \beta r}{b' + \beta' r} = \frac{n'}{n},$$

oder man hat:

$$\alpha' = \frac{a}{r} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) + \frac{n}{n'} \alpha$$

$$\beta' = \frac{b}{r} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) + \frac{n}{n'} \beta.$$

Für die Wege der beiden Strahlen hat man demnach die Gleichungen:

Einfallsstrahl.

Abgelenkter Strahl.

$$\begin{aligned} y &= \alpha(x-d) + a & y &= \left(\frac{a}{r} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) + \frac{n}{n'} \alpha \right) (x-d) + a \\ z &= \beta(x-d) + b & z &= \left(\frac{b}{r} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) + \frac{n}{n'} \beta \right) (x-d) + b \end{aligned} \quad (3.)$$

Will man den abgelenkten Strahl auf eine andere Ebene beziehen, welche zur ersten Bestimmungsebene parallel ist, aber die Gleichung $x = d'$ hat, so setze man $d = d' - (d' - d)$, dann gestalten sich die letzten Gleichungen folgendermassen:

Einfallender Strahl.

Abgelenkter Strahl.

$$\left. \begin{aligned} y &= \alpha(x-d) + a; & y &= \left(\frac{\alpha}{r} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) + \frac{n}{n'} \alpha \right) (x-d') + \left(a + (d'-d) \left(\frac{\alpha}{r} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) + \frac{n}{n'} \alpha \right) \right) \\ z &= \beta(x-d) + b; & z &= \left(\frac{\beta}{r} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) + \frac{n}{n'} \beta \right) (x-d') + \left(b + (d'-d) \left(\frac{\beta}{r} \left(\frac{n}{n'} - 1 \right) + \frac{n}{n'} \beta \right) \right) \end{aligned} \right\} (4.)$$

oder kurz:

$$\begin{aligned} y &= \alpha(x-d) + a \\ z &= \beta(x-d) + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \alpha'(x-d') + a' \\ z &= \beta'(x-d') + b' \end{aligned}$$

Nach der analytischen Geometrie bedeutet hier:

$$\alpha = \frac{\cos SY}{\cos SX}, \quad \beta = \frac{\cos SZ}{\cos SX}, \quad \alpha' = \frac{\cos S'Y}{\cos S'X}, \quad \beta' = \frac{\cos S'Z}{\cos S'X},$$

wo nämlich SX Winkel des einfallenden, $S'X$ Winkel des abgelenkten Strahls mit der Axe der X u. s. f. bedeutet. Ferner sind a und b die Coordinaten des Schnittpunktes des einfallenden Strahls und der Bestimmungsebene $x = d$ und ebenso a' und b' die des Schnittpunktes des abgelenkten Strahls mit der Bestimmungsebene $x = d'$.

II.

Betrachtung des Weges eines Strahls, wenn derselbe an beliebig vielen sphärischen Flächen, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, abgelenkt wird.

§. 3.

Man denke sich nun μ Kugelflächen, deren Mittelpunkte alle in ein und derselben Geraden liegen, die die Axe des durch die Kugelflächen gebildeten centrirten optischen Apparates heisst, und als Axe der X angenommen werden soll. Die Abscissen der Punkte D , in welchen die Axe von den Kugelflächen geschnitten wird, heissen $d_1, d_2, d_3, \dots, d_\lambda, \dots, d_\mu$.

Denkt man sich nun von dem einfallenden Strahl zwei Punkte auf die optische Axe projectirt, so gibt die Richtung, nach welcher man in seinem Laufe von der Projection des ersten Punktes zu der des zweiten kommt, die positive Richtung der Abscissen an. Die d sind alle positiv, wenn blos von Refraktion die Rede ist, bei Beachtung der Reflexion aber können auch negative d vorkommen. Für den Fall der Refraktion ist auch ein folgendes d immer gröfser, als sein vorhergehendes. Die Abscissen der Centra sind um die Radien $r_1, r_2, r_3, \dots, r_\lambda, \dots, r_\mu$ verschieden von jenen der Punkte D , so dafs man für sie hat $x = d \pm r$. Das obere Zeichen mufs genommen werden, wenn der Punkt D in der positiven Richtung vor den Mittelpunkt kommt, oder wenn man in positivem Sinne längs der Axe fortsschreitend, auf den erhabenen, als den in Betracht kommenden Theil der Kugelfläche, trifft; das Doppelzeichen legen wir übrigens in den Werth von r .

Die Brechungsexponenten der einzelnen vor der ersten, zweiten, dritten u. s. w. und endlich μ^{ten} Kugelfläche liegenden Medien seien $n_1, n_2, n_3, \dots, n_\lambda, \dots, n_\mu$, das Medium hinter der letzten oder μ^{ten} Fläche hat als Brechungsexponent $n_{\mu+1}$. Im Falle der Reflexion sind die Quotienten zweier aufeinander Brechungsexponenten -1 . Ferner seien die Bestimmungsgröfsen der Lage eines Strahls, wie sie am Schlusse von I. näher besprochen wurden, nachstehende:

a_1, b_1, α_1 und β_1 vom Wege des Strahls vor der 1^{ten} Fläche,

a_2, b_2, α_2 und β_2 „ „ „ „ „ 2^{ten} „

a_3, b_3, α_3 und β_3 „ „ „ „ „ 3^{ten} „

• • • • •

$a_\lambda, b_\lambda, \alpha_\lambda$ und β_λ vom Wege des Strahls vor der λ^{ten} Fläche,

a_μ, b_μ, α_μ und β_μ " " " " " " " " μ^{ten} Fläche,

$a_{\mu+1}, b_{\mu+1}, \alpha_{\mu+1}$ und $\beta_{\mu+1}$ hinter der μ^{ten} Fläche.

Nun gelten nach (4) folgende Gleichungen:

für die Lage des Strahls vor der ersten Ablenkung:

$$y = \alpha_1(x - d_1) + a_1$$

$$z = \beta_1(x - d_1) + b_1,$$

für die Lage des Strahls vor der zweiten Ablenkung:

$$y = \alpha_2(x - d_2) + a_2$$

wobei ist:

$$z = \beta_2(x - d_2) + b_2$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \frac{1}{r_1} a_1 + \frac{n_1}{n_2} \alpha_1;$$

$$\beta_2 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \frac{1}{r_1} b_1 + \frac{n_1}{n_2} \beta_1$$

$$a_2 = (d_2 - d_1) \alpha_2 + a_1;$$

$$b_2 = (d_2 - d_1) \beta_2 + b_1,$$

für die Lage des Strahls vor der dritten Ablenkung:

$$y = \alpha_3(x - d_3) + a_3$$

wobei ist:

$$z = \beta_3(x - d_3) + b_3$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{n_2}{n_3} - 1\right) \frac{1}{r_2} a_2 + \frac{n_2}{n_3} \alpha_2;$$

$$\beta_3 = \left(\frac{n_2}{n_3} - 1\right) \frac{1}{r_2} b_2 + \frac{n_2}{n_3} \beta_2$$

$$a_3 = (d_3 - d_2) \alpha_3 + a_2;$$

$$b_3 = (d_3 - d_2) \beta_3 + b_2,$$

für die Lage des Strahls vor der λ^{ten} Ablenkung:

$$y = \alpha_\lambda(x - d_\lambda) + a_\lambda$$

wobei ist:

$$z = \beta_\lambda(x - d_\lambda) + b_\lambda$$

$$\alpha_\lambda = \left(\frac{n_{\lambda-1}}{n_\lambda} - 1\right) \frac{1}{r_{\lambda-1}} a_{\lambda-1} + \frac{n_{\lambda-1}}{n_\lambda} \alpha_{\lambda-1}; \quad \beta_\lambda = \left(\frac{n_{\lambda-1}}{n_\lambda} - 1\right) \frac{1}{r_{\lambda-1}} b_{\lambda-1} + \frac{n_{\lambda-1}}{n_\lambda} \beta_{\lambda-1}$$

$$a_\lambda = (d_\lambda - d_{\lambda-1}) \alpha_\lambda + a_{\lambda-1};$$

$$b_\lambda = (d_\lambda - d_{\lambda-1}) \beta_\lambda + b_{\lambda-1}$$

endlich für die Lage des Strahls vor der μ^{ten} Ablenkung:

$$y = \alpha_\mu(x - d_\mu) + a_\mu$$

wobei ist:

$$z = \beta_\mu(x - d_\mu) + b_\mu$$

$$\alpha_\mu = \left(\frac{n_{\mu-1}}{n_\mu} - 1\right) \frac{1}{r_{\mu-1}} a_{\mu-1} + \frac{n_{\mu-1}}{n_\mu} \alpha_{\mu-1}; \quad \beta_\mu = \left(\frac{n_{\mu-1}}{n_\mu} - 1\right) \frac{1}{r_{\mu-1}} b_{\mu-1} + \frac{n_{\mu-1}}{n_\mu} \beta_{\mu-1}$$

$$a_\mu = (d_\mu - d_{\mu-1}) \alpha_\mu + a_{\mu-1};$$

$$b_\mu = (d_\mu - d_{\mu-1}) \beta_\mu + b_{\mu-1}$$

und nach Gleichung (3) für die Lage des Strahls nach der μ^{ten} Ablenkung:

$$y = \alpha_{\mu+1}(x - d_\mu) + a_{\mu+1}$$

wobei ist:

$$z = \beta_{\mu+1}(x - d_\mu) + b_{\mu+1}$$

$$a_{\mu+1} = (d_\mu - d_{\mu-1}) \alpha_\mu + a_{\mu-1};$$

$$b_{\mu+1} = (d_\mu - d_{\mu-1}) \beta_\mu + b_{\mu-1}$$

$$\alpha_{\mu+1} = \left(\frac{n_\mu}{n_{\mu+1}} - 1\right) \frac{1}{r_\mu} a_\mu + \frac{n_\mu}{n_{\mu+1}} \alpha_\mu; \quad \beta_{\mu+1} = \left(\frac{n_\mu}{n_{\mu+1}} - 1\right) \frac{1}{r_\mu} b_\mu + \frac{n_\mu}{n_{\mu+1}} \beta_\mu.$$

Wir sehen in diesen Gleichungen die Positionsgrößen der folgenden Lagen recurrirend ausgedrückt durch die der vorhergehenden und es ist solchergestalt die Lage des schliesslich aus dem optischen Apparat austretenden Strahls mit der Lage des eintretenden durch Größen, welche die räumliche und optische Beschaffenheit des Apparates vertreten, in Relation gebracht.

§. 4.

Das System der Gleichungen für a und α können wir auch in folgender Weise anschreiben und bemerken dabei, dafs es für b und β ganz gleichlautend ist:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\mu+1} &= p_{2\mu-1} a_{\mu} + q_{2\mu-2} \alpha_{\mu} \quad \text{und dabei:} \quad p_{2\mu-1} = \left(\frac{n_{\mu}}{n_{\mu+1}} - 1 \right) \frac{1}{r_{\mu}}; & q_{2\mu-2} &= \frac{n_{\mu}}{n_{\mu+1}} \\
 a_{\mu} &= p_{2\mu-2} \alpha_{\mu} + q_{2\mu-3} a_{\mu-1} & p_{2\mu-2} &= (d_{\mu} - d_{\mu-1}); & q_{2\mu-3} &= 1 \\
 \alpha_{\mu} &= p_{2\mu-3} a_{\mu-1} + q_{2\mu-4} \alpha_{\mu-1} & p_{2\mu-3} &= \left(\frac{n_{\mu-1}}{n_{\mu}} - 1 \right) \frac{1}{r_{\mu-1}}; & q_{2\mu-4} &= \frac{n_{\mu-1}}{n_{\mu}} \\
 &\dots\dots\dots & & & & \\
 \alpha_{\lambda+2} &= p_{2\lambda+1} a_{\lambda+1} + q_{2\lambda} \alpha_{\lambda+1} & p_{2\lambda+1} &= \left(\frac{n_{\lambda+1}}{n_{\lambda+2}} - 1 \right) \frac{1}{r_{\lambda+1}}; & q_{2\lambda} &= \frac{n_{\lambda+1}}{n_{\lambda+2}} \\
 a_{\lambda+1} &= p_{2\lambda} \alpha_{\lambda+1} + q_{2\lambda-1} a_{\lambda} & p_{2\lambda} &= (d_{\lambda+1} - d_{\lambda}); & q_{2\lambda-1} &= 1 \\
 \alpha_{\lambda+1} &= p_{2\lambda-1} a_{\lambda} + q_{2\lambda-2} \alpha_{\lambda} & & & & \\
 a_{\lambda} &= p_{2\lambda-2} \alpha_{\lambda} + q_{2\lambda-3} a_{\lambda} & & & & \\
 &\dots\dots\dots & & & & \\
 \alpha_3 &= p_3 a_2 + q_2 \alpha_2 & p_3 &= \left(\frac{n_2}{n_3} - 1 \right) \frac{1}{r_2}; & q_2 &= \frac{n_2}{n_3} \\
 a_2 &= p_2 \alpha_2 + q_1 a_1 & p_2 &= (d_2 - d_1); & q_1 &= 1 \\
 \alpha_2 &= p_1 a_1 + q_0 \alpha_1 & p_1 &= \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \frac{1}{r_1}; & q_0 &= \frac{n_1}{n_2}
 \end{aligned}$$

Sowie aber jetzt die Gleichungen stehen, lassen sie alsbald ein System von Gleichungen der in A näher besprochenen Art erkennen und es sind die in A entwickelten Sätze darauf anzuwenden. Die a und α sind die Bestimmungsgrößen, worunter a_1 und α_1 die willkürlichen und nach Gleichung A (1) hat man deshalb:

$$(5.) \quad \dots\dots \begin{cases} {}^1z_{2\mu-1} = \alpha_{\mu+1} = {}^1F_{2\mu-1} a_1 + q_0 {}^2F_{2\mu-1} \alpha_1 = ta_1 + u\alpha_1 \\ {}^1z_{2\mu-2} = a_{\mu} = {}^1F_{2\mu-2} a_1 + q_0 {}^2F_{2\mu-2} \alpha_1 = va_1 + w\alpha_1 \end{cases}$$

wobei:

$$\begin{aligned}
 {}^1F_{2\mu-1} &= t; & q_0 {}^2F_{2\mu-1} &= u \\
 {}^1F_{2\mu-2} &= v & \text{und } q_0 {}^2F_{2\mu-2} &= w \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

Die F sind in speciellen Fällen nach den in A. §. 6 angegebenen Regeln leicht aus den p und q herzustellen. Allein abgesehen davon, läßt sich noch eine wichtige allgemeine Relation, in der dieselben oder vielmehr die Größen t , u , v und w zu einander stehen, entwickeln. Nach A. (10) ist nämlich:

$${}^1F_{2\mu-1} {}^2F_{2\mu-2} - {}^2F_{2\mu-1} {}^1F_{2\mu-2} = - (q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_{2\mu-2})$$

$$\text{oder:} \quad uv - wt = q_0 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_{2\mu-2}$$

oder es ist $uv - wt = \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \dots \dots \dots (6.)$

Wenn somit drei dieser Größen bekannt sind, so ist es auch die vierte, dadurch aber ist die Lage des austretenden Strahls fixirt, und es gelten schliesslich nun die Gleichungen:

für den austretenden Strahl.

$$\begin{aligned} y &= \alpha(x - d_1) + a & y &= (ta + u\alpha)(x - d_u) + (va + w\alpha) \} \\ z &= \beta(x - d_1) + b & z &= (tb + u\beta)(x - d_u) + (vb + w\beta) \} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (7.)$$

III.

Von den Strahlen, die mit der Axe eine gemeinschaftliche Ebene haben.

§. 5.

N l l El t l l l l g i i l l D l l l

Nach den Elementen der analytischen Geometrie ist die Bedingung hierzu:

$$(ta + u\alpha - \alpha)(vb + w\beta - b) = (tb + u\beta - \beta)(va + w\alpha - a).$$

$$(ab - a\beta) \left(1 + \frac{n_1}{n_{u+1}} - (u+v) \right) = 0.$$

... Hat die antike Kunst eine solche besondere Beschaffenheit, daß sie

a) Hat der optische Apparat eine solche besondere Beschaffenheit, daß ist:

$$u + v = 1 + \frac{n_1}{n_{u+1}},$$

Hat aber das antike Apparat nicht gerade diese besondere Einrichtung so haben:

Hat aber der optische Apparat nicht gerade diese besondere Einrichtung, so haben:

b) Alle Strahlen, bei welchen $a\beta = \alpha b$ ist, die Eigenschaft mit ihren entsprechenden austretenden Strahlen in einer Ebene zu liegen.

1) Ist nun zuerst $\alpha = \beta = 0$, so wird unsere Bedingung erfüllt; dann aber ist der eintretende Strahl parallel zur Axe und man hat aus (7):

Eintretender Strahl.

Austrittender Strahl.

$$y = a$$

$$y = ta(x - d_\mu) + va$$

$$y = ta(x - (d_\mu - \frac{v}{t}))$$

oder:

$$z = b$$

$$z = tb(x - d_\mu) + vb$$

$$z = tb(x - (d_\mu - \frac{v}{t}))$$

Aus der letzten Gleichung bemerken wir, daß der austretende Strahl die Axe in einem Punkt schneidet, dessen Abscisse $d_\mu - \frac{v}{t}$ ist, welchen Punkt wir Brennpunkt heißen werden, und worüber später noch ein Weiteres geredet werden soll; für jetzt genügt uns die Bemerkung, daß sowohl eintretender wie austretender Strahl in einer Ebene mit der Axe liegen und da sie unter sich auch in einer Ebene liegen, so ist die Ebene des einfallenden Strahls und der Axe die den beiden Strahlen gemeinsame Ebene, (deren Gleichung ist $z = \frac{b}{a}y$).

2) Ist α und β nicht $= 0$, so können wir unsere früheren Gleichungen (7) so anschreiben:

Einfallender Strahl.

Austrittender Strahl.

$$y = \alpha(x - (d_1 - \frac{a}{\alpha}))$$

$$y = \alpha(t\frac{a}{\alpha} + u)(x - (d_\mu - \frac{v\frac{a}{\alpha} + w}{t\frac{a}{\alpha} + u}))$$

$$z = \beta(x - (d_1 - \frac{b}{\beta}))$$

$$z = \beta(t\frac{b}{\beta} + u)(x - (d_\mu - \frac{v\frac{b}{\beta} + w}{t\frac{b}{\beta} + u}))$$

Aus dieser Form ist ersichtlich, daß der eintretende Strahl im Punkt

und der austretende im Punkt

$$\xi = d_1 - \frac{a}{\alpha}$$

$$\xi' = d_\mu - \frac{v\frac{a}{\alpha} + w}{t\frac{a}{\alpha} + u}$$

die Axe schneidet, wenn nämlich, wie ja vorausgesetzt wird, $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$ ist, und da beide Strahlen unter einander auch eine gemeinsame Ebene haben müssen, so ist dieses die Ebene des Einfallsstrahls und der Axe.

Hieraus folgt der Satz: Jeder Strahl, welcher mit der optischen Axe in einer Ebene liegt, verläßt diese Ebene nicht, wenn er auch noch so viele verschiedene Brechungen durch einen centrirten optischen Apparat erfährt.

Ferner erfahren wir: Alle Strahlen, die von einem Punkt der Axe auf die erste Fläche fallen, schneiden sich beim Austritt wieder in einem bestimmten Punkt der Axe und die Abscissen der zwei zugehörigen Punkte sind oben durch ξ und ξ' bezeichnet und gegeben. Endlich sehen wir, daß der austretende Strahl einen Winkel mit der optischen Axe macht, der $(t\frac{a}{\alpha} + u) = (d_1 - \xi)t + u$ mal größer ist, als der Winkel des eintretenden Strahls zu der optischen Axe. Denn es ist nach der analytischen Geometrie: $\text{Tang } SX = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, also haben wir hier $\frac{\text{Tang } S'X}{\text{Tang } SX} = t\frac{a}{\alpha} + u$, das Verhältniß der Tangenten ist aber wegen der Kleinheit der Winkel dem der letztern selbst gleich; soll dies eine gegebene Zahl m sein, so ist:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{m-u}{t} \text{ und } \xi = d_1 - \frac{m-u}{t}, \quad \xi' = d_\mu - \left(v - \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \cdot \frac{1}{m}\right) \frac{1}{t}.$$

Ist $m=1$, so treten die Strahlen unter demselben Winkel aus dem Apparat, unter welchen sie auffallen; die Abscissen der bezüglichen Punkte, aus welchen die einfallenden Strahlen kommen und wo sie wieder zusammentreffen, sind:

$$\xi = d_1 - \frac{1-u}{t}; \quad \xi' = d_\mu - \frac{1}{t} \left(v - \frac{n_1}{n_{\mu+1}}\right) \dots \dots \dots (8.)$$

und die Gleichungen der Strahlen selbst:

für den eintretenden:

für den austretenden:

$$\left. \begin{aligned} y &= \alpha \left(x - \left(d_1 - \frac{1-u}{t}\right)\right) \\ z &= \beta \left(x - \left(d_1 - \frac{1-u}{t}\right)\right) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} y &= \alpha \left(x - \left(d_\mu - \frac{1}{t} \left(v - \frac{n_1}{n_{\mu+1}}\right)\right)\right) \\ z &= \beta \left(x - \left(d_\mu - \frac{1}{t} \left(v - \frac{n_1}{n_{\mu+1}}\right)\right)\right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (9.)$$

Diese merkwürdig ausgezeichneten Punkte der Gleichung (8) nennen wir Hauptpunkte und die durch sie hindurchgehenden Strahlen Hauptstrahlen. Der Hauptpunkt für die Strahlen vor dem Eintritt wird der vordere, der andere für die austretenden Strahlen der hintere Hauptpunkt genannt. Hauptstrahlen und Hauptpunkte gibt es bei jedem optischen Apparat und die Lage der Hauptpunkte hängt mit der Beschaffenheit von jenem zusammen. Im Falle aber diese so eigenthümlich ist, dafs $t=0$, rücken die Hauptpunkte ins Unendliche; wenn aber sowohl $(1-u)$ als auch t der Null gleich ist, ist jeder Strahl in der Axenebene ein Hauptstrahl, denn in diesem Falle sind die Gleichungen des austretenden Strahles:

$$\begin{aligned} y &= \alpha \left(x - \left(d_\mu - \left(v \frac{a}{\alpha} + w\right)\right)\right) \\ z &= \beta \left(x - \left(d_\mu - \left(v \frac{b}{\beta} + w\right)\right)\right) \end{aligned}$$

IV.

Von den zusammengehörigen Ebenen und Bildern, den Brennebenen, Hauptbrennweiten und den Cardinalpunkten.

§. 6.

Die Gleichungen (7) in II. beziehen die Lage des einfallenden Strahls auf eine im Axenpunkt der ersten Fläche, und die Lage des austretenden auf eine im Axenpunkt der letzten Fläche zur Axe senkrechten Ebene. Für die weiteren Untersuchungen aber ist es zweckmäßiger, die Lage der Strahlen auf zwei in beliebigen Punkten der Axe zu ihr senkrechten Ebenen zu beziehen.

Hat die Bestimmungsebene des einfallenden Strahls die Gleichung $x=\xi$ und die des austretenden die Gleichung $x=\xi'$, so setze man in die Gleichungen (7) $d_1=\xi - (\xi - d_1)$ und $d_\mu=\xi' - (\xi' - d_\mu)$, was der Identität der Ausdrücke wegen gestattet ist; man erhält dann für den eintretenden Strahl:

$$\begin{aligned} y &= \alpha (x - \xi + (\xi - d_1)) + a \\ z &= \beta (x - \xi + (\xi - d_1)) + b \end{aligned} \quad \text{oder:} \quad \begin{aligned} y &= \alpha (x - \xi) + a + \alpha (\xi - d_1) \\ z &= \beta (x - \xi) + b + \beta (\xi - d_1), \end{aligned}$$

für den austretenden Strahl:

$$\begin{aligned} y &= (ta + u\alpha) (x - \xi' + (\xi' - d_\mu)) + va + w\alpha \\ z &= (tb + u\beta) (x - \xi' + (\xi' - d_\mu)) + vb + w\beta \end{aligned} \quad \text{oder:}$$

$$\begin{aligned} y &= (ta + u\alpha) (x - \xi') + (va + w\alpha) + (ta + u\alpha) (\xi' - d_\mu) \\ z &= (tb + u\beta) (x - \xi') + (vb + w\beta) + (tb + u\beta) (\xi' - d_\mu). \end{aligned}$$

Setzt man:

$$(10.) \dots \dots \dots \begin{cases} a = a + (\xi - d_1) \alpha; & b = b + (\xi - d_1) \beta, \text{ also:} \\ a = a + (d_1 - \xi) \alpha; & b = b + (d_1 - \xi) \beta, \end{cases}$$

wo $d_1 - \xi = \varepsilon$ die Entfernung der neuen Bestimmungsebene von der Vorderfläche bedeutet und positiv ist, wenn $d_1 > \xi$, negativ, wenn $d_1 < \xi$, wo also ε immer von der Bestimmungsebene aus zur vordern Fläche hin zu messen und die Qualität nach §. 3 zu bestimmen ist. Setzt man ebenso $d_\mu - \xi' = \varepsilon'$, wo ε' die Entfernung der hintern Bestimmungsebene von der letzten Fläche bedeutet, gemessen von der Bestimmungsebene aus gegen die Fläche hin, und dann nach §. 3 mit den gehörigen Zeichen versehen wird, so hat man:

einfallender Strahl.

austretender Strahl.

$$\begin{aligned} y &= a(x - \xi) + a & y &= (ta + (u + t\varepsilon)\alpha)(x - \xi') + (v - t\varepsilon')a + (w + v\varepsilon - u\varepsilon' - t\varepsilon\varepsilon')\alpha \\ z &= \beta(x - \xi) + b & z &= (tb + (u + t\varepsilon)\beta)(x - \xi') + (v - t\varepsilon')b + (w + v\varepsilon - u\varepsilon' - t\varepsilon\varepsilon')\beta. \end{aligned}$$

Substituiert man aber:

$$(11.) \dots \dots \dots \begin{cases} t = t & v - t\varepsilon' = v \\ u + t\varepsilon = u & w + v\varepsilon - u\varepsilon' - t\varepsilon\varepsilon' = w, \end{cases}$$

wobei sich durch die gehörige Multiplikation sogleich ergibt:

$$(12.) \dots \dots \dots uv - wt = uv - wt = \frac{n_1}{n_{\mu+1}},$$

so erhält man:

für den einfallenden Strahl:

für den austretenden Strahl:

$$(13.) \dots \dots \dots \begin{cases} y = \alpha(x - \xi) + a & y = (ta + u\alpha)(x - \xi') + (va + w\alpha) \\ z = \beta(x - \xi) + b & z = (tb + u\beta)(x - \xi') + (vb + w\beta) \end{cases}$$

Weil wir in unsere Gleichung die zwei ganz in unserer Willkür stehenden neuen Größen ε und ε' und die von ihnen in gegebener Weise abhängigen u , v und w eingeführt haben, so dürfen wir auch beliebige Annahme hierüber machen, die dann aber, wie wir sehen werden, die wichtigsten Resultate erblicken lassen.

§. 7.

Es sei $w = 0$.

Nimmt man $w = 0$ an, so ist $uv = \frac{n_1}{n_{\mu+1}}$, $u = \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \cdot \frac{1}{v}$.

Die Gleichungen der Strahlen sind dann:

Einfallender Strahl.

Austretender Strahl.

$$(14.) \dots \dots \dots \begin{cases} y = \alpha(x - \xi) + a & y = (ta + \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \cdot \frac{\alpha}{v})(x - \xi') + va \\ z = \beta(x - \xi) + b & z = (tb + \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \cdot \frac{\beta}{v})(x - \xi') + vb \end{cases}$$

Ferner ist: $d_\mu - \xi' = \varepsilon' = \frac{w + v\varepsilon}{u + t\varepsilon} = \frac{w + v(d_1 - \xi)}{u + t(d_1 - \xi)}$.

Durch die Annahme $w = 0$ ist also nur noch eine der Bestimmungsebenen beliebig, indem jetzt zu jeder einmal angenommenen vordern eine gewisse hintere gehört.

Die Coordinaten des Punktes, in welchen der eintretende Strahl die vordere Ebene durchdringt, sind $y = a$ und $z = b$; die Coordinaten des Punktes, wo der austretende Strahl die letzte Bestimmungsebene schneidet, sind $y = va$ und $z = vb$ und wir sehen dieselben ganz unabhängig von der Richtung des einfallenden Strahls, woraus sich der wichtige Schluss ziehen läßt:

Alle Strahlen, welche von einem Punkt aus auf die vordere Fläche des Apparates fallen, kommen nach dem Durchgang wieder in einem Punkt zusammen. Alle von einem Punkt auf die vordere Fläche fallende Strahlen bilden einen Strahlenkegel, dessen Spitze der Punkt ist,

und dessen Basis die vordere Fläche ist; die austretenden Strahlen bilden, wie wir sehen, gleichfalls einen Kegel, dessen Basis die letzte Fläche ist und dessen Spitze in einem bestimmten Punkt liegt. Ferner haben die Eintrittskegel, deren Spitzen in einer beliebigen auf der optischen Axe senkrechten Ebene liegen, solche entsprechende Austrittskegel, dass von diesen die Spitzen auch wieder sämmtlich in einer auf der optischen Axe senkrechten Ebene liegen. Ist die erste Ebene unsere willkürlich angenommene vordere Bestimmungsebene, so ist die hintere Bestimmungsebene die Ebene der Spitzen von den Austrittskegeln.

Die Spitze des Austrittskegels nennt man das durch den optischen Apparat hervorgebrachte Bild der Spitze des Einfallskegels, weil ein Auge, das sich hinter dem Bildpunkt befindet, von ihm Strahlen gerade so empfängt, als wäre dieser der eigentliche Strahlen werfende Punkt selbst, oder mit andern Worten, das Auge sieht den Bildpunkt. Nach dem, was oben über die Qualität von ε' gesprochen wurde, ist der Bildpunkt für ein positives ε' noch vor der letzten Kugelfläche; man heisst ihn dann ein virtuelles, wenn dagegen das ε' negativ ist, ein wirkliches Bild von der Spitze des Einfallskegels. Die Bilder aller Punkte der vordern Bestimmungsebene liegen, wie wir gesehen haben, auf der hintern Bestimmungsebene, aus diesem Grunde heissen wir auch die vordere Bestimmungsebene, Gegenstandsebene, die hintere Bestimmungsebene dagegen Bildebene und beide machen ein zusammengehöriges oder conjugirtes Paar aus.

§. 8.

Eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft der zwei zusammengehörigen Kegelspitzen ist die, dass sie mit der optischen Axe in einer Ebene liegen. Denn es ist:

für die vordere Spitze:

$$\begin{aligned} x &= \xi \\ y &= a \\ z &= b \end{aligned}$$

und für die letzte Spitze:

$$\begin{aligned} x &= \xi' \\ y &= v a \\ z &= v b. \end{aligned}$$

Daher $\frac{z}{y} = \frac{b}{a}$ oder nach (10) $= \frac{b - \varepsilon \beta}{a - \varepsilon \alpha}$ für beide Punkte; dass aber diese Ebene die Ebene des von der ersten Spitze ausgehenden Hauptstrahls ist, leuchtet von selbst ein, wir wollen sie die optische Ebene heissen.

Beide Spitzen haben übrigens von der Axe im Allgemeinen ungleiche Entfernungen; dieselben haben nach der analytischen Geometrie die Werthe:

für die vordere Spitze:

$$V a^2 + b^2$$

für die letzte Spitze:

$$v V a^2 + b^2.$$

Das Verhältniss beider ist: $v = v - t\varepsilon' = v - \frac{wt + vt\varepsilon}{u + t\varepsilon} = \frac{n_1}{n_{\mu+1}(u + t\varepsilon)}$, und ist also bei

einem und demselben Apparat allein abhängig von ε , oder mit andern Worten diese Verhältnisszahl ist für alle aus derselben vordern Ebene kommenden Einfallskegel dieselbe, und nur von der Zusammensetzung des Apparates abhängig. Ist die Verhältnisszahl positiv, so zeigt dies an, dass beide Spitzen auf derselben Seite der optischen Axe in der optischen Ebene liegen; man sagt dann, beide Spitzen liegen zu einander aufrecht; im entgegengesetzten Falle liegen sie auf verschiedenen Seiten der optischen Axe in der optischen Ebene und man sagt, sie liegen verkehrt zu einander. Die Bilder aller Spitzen derselben vordern Ebene haben somit bei ein und derselben Zusammenstellung des Apparates dieselbe Lage zur Axe.

Zwei Punkte derselben Gegenstandsebene haben eine gewisse Entfernung zu einander, und diese ist nach der analytischen Geometrie:

$$V(\xi_1 - \xi_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = V(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2.$$

Die entsprechenden Bilder haben die Entfernung:

$$V(\xi'_1 - \xi'_2)^2 + (v a_1 - v a_2)^2 + (v b_1 - v b_2)^2 = v V(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2,$$

das Verhältniss beider Entfernungen ist wieder $= v$.

Daraus geht hervor, daß einer Figur in der vordern Ebene eine Bildfigur in der hintern Ebene entspricht, die ihr ganz ähnlich ist und deren lineare Dimensionen das Verhältniß v haben, so daß es gerechtfertigt erscheint:

$$(15.) \quad \dots \dots \dots v = \frac{n_1}{n_{\mu+1}(u+t\varepsilon)} \text{ die lineare, und} \\ v^2 = \left(\frac{n_1}{n_{\mu+1}(u+t\varepsilon)} \right)^2 \text{ die Flächenvergrößerungszahl zu heißen.}$$

Die Vergrößerungszahlen sind bei demselben Apparat abhängig von ε der Entfernung der Gegenstandsebene von der Vorderfläche. Wollte man zwei verschiedene Apparate bezüglich der Vergrößerungszahlen vergleichen, so müßte man bei ihnen ein und dasselbe ε nehmen, dabei aber würde das Verhältniß der Vergrößerungszahlen immer ein anderes werden, wenn man für ε einen andern Werth annimmt. Nimmt man für ε den Werth $\frac{1}{t}$ an, der, wie wir noch sehen werden, eine wichtige und die Wirkung eines Apparates bezeichnende Rolle spielt, so ist die Vergrößerungszahl $\frac{n_1}{n_{\mu+1}(u+1)}$ und diese könnte als Vergleichungszahl zwischen verschiedenen Apparaten dienen. Für sehr weit entfernte Gegenstände wird in allen Fällen, wo nicht etwa $t=0$ ist, die Vergrößerungszahl sehr gering ausfallen; soll dies nicht sein und überhaupt die Vergrößerungszahl unabhängig von der Entfernung der Gegenstandsebene sein, so muß der Apparat eine derartige Zusammensetzung haben, daß $t=0$ ist. Dies wird also die für Fernrohre vorgeschriebene Einrichtung des optischen Apparates sein. Für das Fernrohr gilt also die constante Vergrößerungszahl $v = \frac{n_1}{n_{\mu+1}u} = v$.

Für $\varepsilon=0$ ist $\varepsilon' = \frac{w}{u}$ und $v = \frac{n_1}{n_{\mu+1}u}$, d. h.: Für Punkte, die in der die Vorderfläche des Apparates berührenden Ebene liegen, befinden sich die Bilder in der um $\frac{w}{u}$ von der letzten Fläche entfernten Ebene und haben die dem Fernrohr eigenthümliche Vergrößerungszahl. Den Bildpunkt in der Axe heißt man in diesem Falle Augenzentrum.

§. 9.

Es ist sehr leicht einzusehen, daß ein jeder Punkt in der Axe sein Bild wieder in der Axe hat, weil für $a=b=0$ auch $va=vb=0$ ist.

Daß ferner der hintere Hauptpunkt das Bild des vordern ist, überhaupt, daß eine durch den hintern Hauptpunkt gehende Ebene die Bildebene ist zu einer durch den vordern Hauptpunkt gehenden, ist leicht dadurch nachgewiesen, daß, wenn man aus (8) den Werth $d_1 - \xi$ in den Ausdruck für ε' statt ε setzt, man dadurch einen Werth $\varepsilon' = d_\mu - \xi'$ erhält, der dem in (8) gefundenen gleich ist. Für die Hauptpunkte bezeichnet man das ε mit h , das ε' mit h' , und es ist daher:

$$(16.) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} h = d_1 - \xi = \frac{1-u}{t} \\ h' = d_\mu - \xi' = \frac{1}{t} \left(v - \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \right) \end{cases}$$

Die Vergrößerungszahl für die durch die Hauptpunkte gehenden zusammengehörigen Ebenen, welche man Hauptebenen heißt, ist $\frac{n_1}{n_{\mu+1}}$, also von der Zusammensetzung des Apparates selbst unabhängig.

§. 10.

Wir wollen nun untersuchen, wo die beiden zusammengehörigen Ebenen liegen, bei welchen die Vergrößerungszahl $= 1$ ist.

Hier ist also $v = 1 = \frac{n_1}{n_{u+1}(u + t\varepsilon)}$, daraus findet man für $\varepsilon = k$ und $\varepsilon' = k'$, nämlich für die Entfernung der betreffenden Gegenstandsebene zur ersten Fläche und für die Entfernung der zugehörigen Bildebene zur letzten Fläche:

$$\left. \begin{aligned} d_1 - \xi = k &= \frac{1}{t} \left(\frac{n_1}{n_{u+1}} - u \right) \\ d_u - \xi' = k' &= \frac{v-1}{t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17.)$$

Weil in diesem Falle die Bilder congruent sind mit den Gegenstandsfiguren, so heisst man die zusammengehörigen Ebenen Congruenzebenen und ihre Axenpunkte Congruenzpunkte. Letztere besitzen die Eigenschaft, dass die Axen-Winkel der durch sie gehenden Strahlen beim

hintern $\frac{n_1}{n_{u+1}}$ mal gröfser sind, als die bei dem vordern Congruenzpunkt. Setzt man nämlich, wie es für diesen Fall sein muss, $a = b = 0$ und $v = 1$ so hat

der einfallende Strahl:

der austretende Strahl:

$$\alpha = \alpha$$

$$\alpha' = \frac{n_1}{n_{u+1}} \alpha$$

$$\beta = \beta$$

$$\beta' = \frac{n_1}{n_{u+1}} \beta$$

$$\text{Tang } SX = V\alpha^2 + \beta^2$$

$$\text{Tang } S'X = \frac{n_1}{n_{u+1}} V\alpha^2 + \beta^2,$$

also das Verhältnifs der beiden Tangenten $= \frac{n_1}{n_{u+1}}$; da aber die Strahlen nur kleine Winkel mit der Axe machen, so ist diese Zahl auch die Verhältnifszahl der Winkel selbst.

Im Falle als $\frac{n_1}{n_{u+1}} = 1$ ist, fallen die Congruenzpunkte mit den Hauptpunkten zusammen.

§. 11.

Soll die Vergrößerungszahl $= -1$ sein, in welchem Falle zwei gleich grofse, aber gegengestellte Bilder zum Vorschein kommen, so hat man:

$$\left. \begin{aligned} v = -1 &= \frac{n_1}{n_{u+1}(u + t\varepsilon)}; \text{ hieraus folgt: } \varepsilon = -\frac{1}{t} \left(u + \frac{n_1}{n_{u+1}} \right) = i \\ i' &= \frac{w + vi}{u + ti} = \frac{wt - uv - \frac{n_1}{n_{u+1}}v}{t(u - u - \frac{n_1}{n_{u+1}})} = \frac{v + 1}{t} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18.)$$

Hiedurch sind die diesem Falle entsprechenden zugehörigen Ebenen gegeben; die Punkte, in welchen sie die Axe schneiden, wollen wir Gegenpunkte heissen. — Zwei zusammen-

gehörige durch die Gegenpunkte gehende Strahlen haben bezüglich ihrer Axenwinkel das Verhältniß $\frac{n_1}{n_{\mu+1}}$.

§. 12.

Es sei $v=0$.

Ist $v=0$, so ist $wt = -\frac{n_1}{n_{\mu+1}}$, $w = -\frac{n_1}{n_{\mu+1}t}$.

Die Gleichungen der Strahlen sind hier:

Einfallender Strahl.

$$y = \alpha(x - \xi) + a$$

$$z = \beta(x - \xi) + b$$

Austretender Strahl.

$$y = (t\alpha + u\alpha)(x - \xi') - \frac{n_1\alpha}{n_{\mu+1}t}$$

$$z = (t\beta + u\beta)(x - \xi') - \frac{n_1\beta}{n_{\mu+1}t}$$

Als bald ist hier ersichtlich, daß die Coordinaten des Punktes, in welchem der austretende Strahl die letzte Bestimmungsebene durchdringt, einzig und allein abhängen von der Richtung des einfallenden Strahls, daß also alle gleichgerichteten Einfallsstrahlen in einem Punkt der letzten Bestimmungsebene zusammen kommen. Hier entspricht also einem einfallenden Strahlen-Cylinder nach dem Durchgang ein bestimmter Strahlen-Kegel, welcher seine Spitze in einem Punkt der zweiten Bestimmungsebene hat; jeder anders gerichtete Strahlen-Cylinder hat auch die Spitze seines Austrittskonus in einem andern Punkte der zweiten Ebene. Weil $v=0$, so haben wir die Gleichung:

$$(19.) \quad v - t\varepsilon' = 0, \text{ also } \varepsilon' = d_\mu - \xi' = \frac{v}{t} = g'.$$

Die zweite Bestimmungsebene ist also vollkommen fixirt, während die erste ganz beliebig angenommen werden kann.

Diese so merkwürdige Bestimmungsebene heißt man Brennebene für eintretende Parallelstrahlen, oder hintere Brennebene, den Punkt, in welchem dieselbe die optische Axe schneidet, und der, wie man leicht sieht (da für ihn $\frac{n_1\alpha}{n_{\mu+1}t} = \frac{n_1\beta}{n_{\mu+1}t} = 0$ sein muß) die

Spitze desjenigen Austrittskegels ist, welcher den zur Axe parallel einfallenden Strahlen entspricht, nennt man Brennpunkt für parallel eintretende Strahlen, oder hinterer Brennpunkt, und die Entfernung g' von ihm zur hintern Fläche hin die hintere Brennpunktsdistanz. Sämmtliche Punkte der Brennebene für eintretende Parallelstrahlen können auch als Bildpunkte einer zugehörigen unendlich entfernten vordern Bestimmungsebene angesehen werden, weil ε' in (14) für $\varepsilon = \infty$ den Werth $g' = \frac{v}{t}$ annimmt.

Es ist unschwer, einzusehen, daß man die Richtung des einem bestimmten Punkt der hintern Brennebene entsprechenden Einfalls-Cylinders erhält, wenn man den Punkt mit dem hintern Hauptpunkt verbindet; ist dagegen die Richtung der einfallenden Strahlen gegeben, so findet man den entsprechenden Punkt, indem man durch den hintern Hauptpunkt in dieser Richtung eine Gerade zieht und deren Schnittpunkt mit der hintern Brennebene aufsucht.

§. 13.

Es sei $u=0$.

Wenn $u=0$ ist, so sind die Gleichungen für die Wege der Strahlen:

Einfallender Strahl:

$$y = \alpha (x - \xi) + a$$

$$z = \beta (x - \xi) + b$$

Austretender Strahl:

$$y = t \alpha (x - \xi') + v a - \frac{n_1 \alpha}{n_{u+1} t}$$

$$z = t \beta (x - \xi') + v b - \frac{n_1 \beta}{n_{u+1} t}$$

und

$$\varepsilon = d_1 - \xi = -\frac{u}{t} = g \quad \dots \quad (20.)$$

Wir sehen hieraus, daß alle Strahlen, die durch einen Punkt der fixirten vordern Bestimmungsebene gehen, unter gleichem Winkel aus dem Apparat austreten, daß somit einem von einem Punkt der ersten Bestimmungsebene auf den Apparat fallenden Strahlen-Konus ein Austritts-Cylinder entspricht, dessen Richtung mit dem Ort der angenommenen Konusspitze zusammenhängt. In diesem Falle heisst man die erste und fixirte Bestimmungsebene die Brennebene für austretende Parallelstrahlen oder vordere Brennebene und ihr Axenpunkt, welcher, wie man leicht sieht, die Spitze des auf den Apparat fallenden Strahlen-Konus ist, dem ein zur Axe parallel austretender Strahlen-Cylinder entspricht, heisst Brennpunkt für parallele Austrittsstrahlen, oder vorderer Brennpunkt. Auch hier hält es nicht schwer, zu beweisen, daß die Richtung des austretenden Cylinders, der einem bestimmten Punkt der vordern Brennebene entspricht, dadurch gefunden wird, daß man diesen Punkt mit dem vordern Hauptpunkt verbindet; oder wenn die Richtung gegeben ist, so gewinnt man den entsprechenden Punkt der Brennebene, indem man in dieser Richtung durch den vordern Hauptpunkt eine Gerade zieht, und deren Schnittpunkt mit der vorderen Brennebene aufsucht.

§. 14.

Die Entfernung einer Gegenstandsebene zur vordern Brennebene hingemessen, und die der Bildebene zur hintern Brennebene heisst man Brennweite, und zwar vordere und hintere; die Qualität derselben ist nach §. 3 zu bestimmen, wobei feststeht, daß von den zusammengehörigen Ebenen immer auszugehen und zu den betreffenden Brennebenen hin zu messen ist.

Nun waren aber die Abscissen der Brennpunkte:

$$\xi = d_1 - g = d_1 + \frac{u}{t} \quad \text{und} \quad \xi' = d_u - g' = d_u - \frac{v}{t}.$$

Für zwei zusammengehörige Ebenen sind die Abscissen:

$$\xi = d_1 - \varepsilon \quad \text{und} \quad \xi' = d_u - \varepsilon'$$

und hieraus sind die Brennweiten, welche wir mit l bezeichnen wollen:

die vordere:

die hintere:

$$l = \varepsilon - g = \varepsilon + \frac{u}{t} = \frac{u + t\varepsilon}{t}; \quad l' = \varepsilon' - g' = \varepsilon' - \frac{v}{t} = -\frac{n_1}{n_{u+1}} \frac{1}{t(u + t\varepsilon)} \quad (21.)$$

Setzt man in diesen Gleichungen für ε und ε' die Werthe aus (16), so erhält man die Brennweiten der Hauptpunkte und diese heisst man Hauptbrennweiten; für dieselben hat man, wenn man sie ihrer Wichtigkeit wegen besonders und zwar mit f und f' bezeichnet:

$$l = f = \frac{1}{t} \quad l' = f' = -\frac{n_1}{n_{u+1}} \frac{1}{t} = -\frac{n_1}{n_{u+1}} f \quad \dots \quad (22.)$$

Für die Congruenzpunkte sind die Brennweiten, wenn man die Formeln (17) in (21) substituirt:

$$l = \frac{n_1}{n_{u+1}} \cdot \frac{1}{t} = -f' \quad l' = -\frac{1}{t} = -f \quad \dots \quad (23.)$$

Der Abstand von dem vordern Congruenzpunkt zum vordern Hauptpunkt ist $= f + f'$ und ebenso groß ist er auch von dem hintern Congruenzpunkt zum hintern Hauptpunkt.

Für die Gegenpunkte muß man in (21) die Formeln (18) einführen und erhält dann:

$$(24.) \dots \dots \dots l = -\frac{n_1}{n_{u+1}} \cdot \frac{1}{t} = f' \quad l' = \frac{1}{t} = f.$$

Der Abstand vom vordern Gegenpunkt zum vordern Hauptpunkt ist $= f - f'$ und ebenso groß, aber mit entgegengesetzter Qualität, ist er auch zwischen den hintern zwei Punkten. Der Abstand vom vordern Gegenpunkt zum vordern Congruenzpunkt ist $= -2f'$ und der Abstand vom hintern Gegenpunkt zum hintern Congruenzpunkt $= -2f$.

Wie wir sehen hat man also:

Vordere Hauptbrennweite $=$ negativer hinterer Brennweite der Congruenzpunkte und $=$ positiver hinterer Brennweite der Gegenpunkte. Hintere Hauptbrennweite $=$ negativer vorderer Brennweite der Congruenzpunkte $=$ positiver vorderer Brennweite der Gegenpunkte. Daraus folgt auch, daß, wenn die beiden Brennpunkte und ein Paar der andern ausgezeichneten Punkte gegeben, damit auch die übrigen Paare leicht aufzufinden sind.

§. 15.

Aus vorstehenden Gleichungen lassen sich leicht mehrere interessante Sätze als Folgerungen ziehen: So ist

$$(25.) \dots \dots \dots l \cdot l' = -\frac{n_1}{n_{u+1}} \cdot \frac{1}{t^2} = ff',$$

d. h.: Das Produkt zweier zusammengehöriger Brennweiten ist bei ein und demselben Apparat constant, es mag die Gegenstandsebene wo immer angenommen werden. Sind somit die Brennpunkte und Hauptbrennweiten gegeben, so läßt diese Gleichung für eine Ebene die Lage der zugehörigen rasch erkennen.

Ferner ist:

$$(26.) \dots \dots \dots \frac{l'}{l} = -\frac{n_1}{n_{u+1}} \cdot \frac{1}{(u + \varepsilon t)^2} = -\frac{n_{u+1}}{n_1} \cdot v^2; \text{ hieraus: } v^2 = -\frac{n_1}{n_{u+1}} \cdot \frac{l'}{l} \text{ und} \\ v = \frac{1}{l} \sqrt{-\frac{n_1}{n_{u+1}} \cdot ff'}$$

Diese Gleichung gibt, wenn die Brennpunkte und Hauptbrennweiten gegeben sind, die Vergrößerungszahl für eine bestimmt angenommene Gegenstandsebene. Auch geben diese Gleichungen zu erkennen, daß die Brennweiten entgegengesetzte Qualität haben. Ist also der Gegenstand vor dem vordern Brennpunkt, so ist das Bild hinter dem hintern und umgekehrt.

Hat man zwei zusammengehörige Ebenenpaare, so ist für diese:

$$l_1 \cdot l'_1 = l_2 \cdot l'_2 \text{ oder: } l_2 : l_1 = l'_1 : l'_2;$$

hieraus folgt aber auch: $\frac{l_2}{l_2 - l_1} = \frac{l'_1}{l'_1 - l'_2}$ und

$$(27.) \dots \dots \dots \frac{l_2}{l_2 - l_1} + \frac{l'_2}{l'_2 - l'_1} = \frac{l'_1}{l'_1 - l'_2} - \frac{l_2}{l_2 - l_1} = 1$$

$l_2 - l_1$ ist hierbei nichts anders als die Entfernung der vordern zwei, und $l'_2 - l'_1$ die der hintern zwei zusammengehörigen Ebenen.

Die Entfernung des vordern Brennpunktes zum hintern ist aus §. 12 und 13:

$$(d_u - d_1) - (g' - g) = (d_u - d_1) - \frac{u + v}{t}.$$

Die Entfernung des vordern Hauptpunktes zum hintern:

$$(28.) \dots \dots \dots (d_u - d_1) - (g' - g) - (f' - f).$$

Die Entfernung des vordern Congruenzpunktes zum hintern:

$$(d_u - d_1) - (g' - g) - (f' - f).$$

Die Entfernung des vordern Gegenpunktes zum hintern:

$$(d_u - d_1) - (g' - g) + (f' - f).$$

Wenn $n_{\mu+1} = n_1$ ist, so ist $f' = -f$, d. h. dann sind die Hauptbrennweiten der Größe nach einander gleich.

§. 16.

Die Bestimmungsgrößen t, u, v, w lassen sich nun auch so ausdrücken:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Aus (22) folgt } t = \frac{1}{f} \text{ und } \frac{n_1}{n_{\mu+1}} = -\frac{f'}{f} \\ \text{Aus (20) } u = -\frac{g}{f} \\ \text{Aus (19) } v = \frac{g'}{f} \\ \text{Hieraus ferner } w = \frac{ff' - gg'}{f} \end{array} \right\} \quad (29.)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nach (14) ist } \varepsilon' = \frac{w + v\varepsilon}{u + t\varepsilon} = \frac{ff' - gg' + g'\varepsilon}{\frac{\varepsilon - g}{f} + \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \cdot \frac{f}{\varepsilon - g}} = \frac{ff' + g'(\varepsilon - g)}{\varepsilon - g} = g' + \frac{ff'}{\varepsilon - g} \\ \text{und nach (11) } v = v - t\varepsilon' = -\frac{f'}{\varepsilon - g} = \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \cdot \frac{f}{\varepsilon - g} \end{array} \right\} \quad (30.)$$

Wenn also f, f', g und g' gegeben sind, so ist dadurch der austretende Strahl ebenso bestimmt wie durch die Größen t, u, v und w .

Die im Vorhergehenden definirten und jedem Apparat eigenthümlich angehörigen Punkte, nämlich: die Haupt-, Brenn-, Congruenz- und Gegenpunkte begreift man unter dem Namen Cardinalpunkte des optischen Apparats.

Besteht der Apparat bloß aus einer einzigen Kugelfläche so ist:

$$\left. \begin{array}{l} t = \frac{n_1 - n_2}{n_2} \cdot \frac{1}{r}, \quad u = \frac{n_1}{n_2}, \quad v = 1, \quad w = 0 \\ \text{und deshalb ist:} \\ f = \frac{n_2 r}{n_1 - n_2}, \quad f' = -\frac{n_1 r}{n_1 - n_2}; \quad h = h' = -r; \quad k = k' = 0; \quad i = 2f; \quad i' = 2f; \quad g = f' \text{ und } g' = f. \end{array} \right\} \quad (31.)$$

Bei einer einzigen Fläche liegen also die Hauptpunkte in ihrem Centrum und die Congruenzpunkte in ihrem Axenpunkt.

§. 17.

Da durch die beiden Hauptbrennweiten und die Lage der Brennpunkte der Weg des austretenden Strahls berechnet werden kann, so ist er auch durch Construction aus diesen Daten zu finden, wie jetzt gezeigt werden soll.

Wenn die Brennpunkte F und F' gegeben sind, so legt man durch dieselben die Brennebenen. Alsdann trägt man von den Brennpunkten aus nach der gehörigen Seite hin die Hauptbrennweiten auf und erhält dadurch die Hauptpunkte H und H' .

Ist nun ein Strahl SS gegeben, zu welchem der Austrittsstrahl $S'S'$ gefunden werden soll, so bestimmt man zuerst den Schnittpunkt A des Strahls SS mit der vordern Brennebene. Diesen Punkt A verbindet man mit dem vordern Hauptpunkt H durch die Gerade AH , welche dann nach §. 13 die Richtung des austretenden Strahls angibt. Alsdann zieht man durch den hintern Hauptpunkt eine Parallele zum Strahl SAS selbst und sucht den Schnittpunkt B derselben und der hintern Brennebene. Weil nun dieser Punkt nach §. 12 allen austretenden Strahlen, die in der Richtung SAS eintreten, gemeinsam ist, so ist er ein Punkt des austretenden Strahls und man hat schliesslich nur noch durch B eine Parallele zu AH , nämlich $S'B'S'$, zu ziehen, um den zu SAS gehörigen Austrittsstrahl $S'B'S'$ zu erhalten. Im Falle, als der eintretende

Strahl zur Axe parallel ist, fällt B mit F' zusammen und man hat dann nur AH und parallel damit $S'F'S'$ zu ziehen, um $S'S'$ zu bekommen.

Um zu einem gegebenen Punkt das durch den optischen Apparat bewirkte Bild zu construiren, darf man nur den Weg zweier von ihm ausgehenden und in seiner optischen Ebene liegenden (und darin nach §. 5 verbleibenden) Strahlen verfolgen; wo sich die zugehörigen Austrittsstrahlen schneiden, dort ist das Bild. Liegt der Punkt in der Axe, so liegt auch sein Bild in der Axe nach §. 9, man hat dann bloß noch einen andern Strahl, vom Punkt ausgehend, anzunehmen und zu diesem den Austrittsstrahl nach dem eben gelehrteten Verfahren zu suchen; wo derselbe die Axe scheidet, dort ist das zu findende Bild.

Ist der Punkt P außerhalb der Axe, so nimmt man am besten den vom Punkt ausgehenden Hauptstrahl PH , dem der zu ihm parallel austretende $P'H'$ entspricht und den zur Axe parallelen PA , dem der austretende $F'P'$ entspricht, wo $F'P'$ parallel mit AH ist. Der Durchschnitt P' von $H'P'$ und $F'P'$ ist der gesuchte Bildpunkt.

Wie umgekehrt zu einem gegebenen Austrittsstrahl der eintretende und zu einem gegebenen Bildpunkt der Gegenstandspunkt zu construiren ist, bedarf keiner weitem Anleitung.

Hat man den Weg des an einer einzigen Fläche abgelenkten Strahl zu construiren, so denkt man sich im Schnittpunkt der Fläche und Axe (in welchem hier beide Congruenzpunkte liegen) und im Centrum, das hier beide Hauptpunkte vorstellt, zwei Ebenen senkrecht zur Axe construirt, und sucht nun die Punkte A und B in welchen der Strahl dieselben durchdringt. Den Punkt A haben beide Strahlen gemein und vergrößert man die Coordinaten des Punktes B im

Verhältniß von $\frac{n_1}{n_2}$, so erhält man den Schnittpunkt B' , in welchem der abgelenkte Strahl die durch das Centrum gelegte Ebene schneidet und hiedurch ist also der gebrochene Strahl bekannt. Alles dies folgt sehr einfach aus den Gleichungen (3) und das Verfahren ist immer dann anzuwenden, wo man den ganzen Weg des Strahls bei seinem Durchgang durch ein System verfolgen soll, ohne die Brennpunkte und Hauptbrennweiten desselben aufsuchen zu wollen.

§. 18.

Ist der optische Apparat so beschaffen, daß $t=0$ ist, so haben alle auf die drei ersten folgende §§. dieses Abschnitts keine Geltung. In diesem Falle haben die Gleichungen folgende Gestalt:

einfallender Strahl:

$$y = \alpha(x - \xi) + a$$

$$z = \beta(x - \xi) + b$$

austretender Strahl:

$$y = \frac{n_1 \alpha}{n_{\mu+1} v} (x - \xi') + v a + w \alpha$$

$$z = \frac{n_1 \beta}{n_{\mu+1} v} (x - \xi') + v b + w \beta$$

und dabei ist $v = v$.

Ist $w=0$, so hat man:

$$(32.) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \alpha(x - \xi) + a \\ z = \beta(x - \xi) + b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{n_1 \alpha}{n_{\mu+1} v} (x - \xi') + v a \\ z = \frac{n_1 \beta}{n_{\mu+1} v} (x - \xi') + v b \end{array} \right.$$

und $v = v$; $\epsilon' = \frac{n_{\mu+1}}{n_1} v (w + v \epsilon)$.

Hier hat man also gleichfalls zusammengehörige Gegenstands- und Bild-Ebenen, allein hier ist die Vergrößerungszahl $v = v$ unabhängig von ϵ und absolut. — Strahlen, welche zur Axe parallel sind, bleiben es. Ueberhaupt sind parallel einfallende Strahlen auch noch nach dem Durchgang parallel, nur ist die Richtung des austretenden Cylinders eine andere als die

des eintretenden. Der Winkel mit der Axe ist bei dem ersteren nämlich $\frac{n_1}{n_{\mu+1} v}$ mal größer als bei dem letzteren. Brennpunkte gibt es hier nicht; es gibt auch keine Hauptpunkte, wenn nicht gerade $v = \frac{n_1}{n_{\mu+1}}$ ist, dann aber ist jeder Punkt der Axe ein solcher; Congruenz- oder

Gegenpunkte gibt es ebenfalls nicht, nur etwa, wenn $v = 1$ oder $= -1$ ist, dann aber sind sämtliche Punkte der Axe Congruenz- oder im zweiten Falle Gegenpunkte, und diese Resultate stehen im Einklange mit denen, welche am Schlusse von §. 5. erhalten worden sind.

V.

Von dem Gange eines Strahls durch zwei oder mehrere mit einander centrisch verbundene Systeme.

§. 19.

Wenn wir zwei Systeme mit derselben optischen Axe haben, so kann man sie wie ein einziges System ansehen, das aus sämtlichen Kugelflächen besteht. Man kann aber auch die Wirkungen der beiden Systeme gesondert betrachten, bemerkt übrigens dabei, daß der austretende Strahl des ersten Systems zugleich eintretender des zweiten Systems ist. Faßt man die Sache so vom doppeltem Gesichtspunkt aus auf, so ergeben sich für die Bestimmungsgrößen der einzelnen Systeme und denen des aus ihnen zusammengesetzten wichtige Relationen, die wir kurz besprechen wollen.

Wir setzen voraus, das erste System habe λ Kugelflächen und das zweite $\mu - \lambda$, zusammen also haben sie μ Flächen. Nun hat man für die Gleichungen des eintretenden und schließlic austretenden Strahls, wenn man die beiden Systeme als eines annimmt:

für den eintretenden Strahl:

$$\begin{aligned} y &= \alpha_1 (x - d_1) + a_1 \\ z &= \beta_1 (x - d_1) + b_1 \end{aligned}$$

für den austretenden Strahl:

$$\begin{aligned} y &= (t a_1 + u \alpha_1) (x - d_\mu) + (v a_1 + w \alpha_1) \\ z &= (t b_1 + u \beta_1) (x - d_\mu) + (v b_1 + w \beta_1) \end{aligned}$$

wo t, u, v, w die Bestimmungsgrößen des zusammengesetzten Systems sind.

Der aus dem ersten System tretende Strahl aber hat die Gleichung:

$$\begin{aligned} y &= (t_1 a_1 + u_1 \alpha_1) (x - d_\lambda) + (v_1 a_1 + w_1 \alpha_1) \\ z &= (t_1 b_1 + u_1 \beta_1) (x - d_\lambda) + (v_1 b_1 + w_1 \beta_1) \end{aligned}$$

Die in das zweite System eintretenden und daraus wieder heraustretenden Strahlen haben die Gleichungen:

eintretender Strahl:

$$\begin{aligned} y &= \alpha_2 (x - d_{\lambda+1}) + a_2 \\ z &= \beta_2 (x - d_{\lambda+1}) + b_2 \end{aligned}$$

austretender Strahl:

$$\begin{aligned} y &= (t_2 a_2 + u_2 \alpha_2) (x - d_\mu) + (v_2 a_2 + w_2 \alpha_2) \\ z &= (t_2 b_2 + u_2 \beta_2) (x - d_\mu) + (v_2 b_2 + w_2 \beta_2) \end{aligned}$$

und hier sind t_1, u_1, v_1 und w_1 die Bestimmungsgrößen des ersten, t_2, u_2, v_2 und w_2 die des zweiten Theil-Systems.

Offenbar ist $\alpha_2 = t_1 a_1 + u_1 \alpha_1$, $\beta_2 = t_1 b_1 + u_1 \beta_1$. Ferner sind a_2 und b_2 die Coordinaten des Punktes, in welchem der Strahl die Ebene $x = d_{\lambda+1}$ schneidet. Diese finden sich aber auch aus der Gleichung des aus dem ersten System austretenden Strahls, wenn man dort $x = d_{\lambda+1}$ setzt; hiedurch aber erhält man:

$$\begin{aligned} a_2 &= (t_1 a_1 + u_1 \alpha_1) (d_{\lambda+1} - d_\lambda) + (v_1 a_1 + w_1 \alpha_1) \\ b_2 &= (t_1 b_1 + u_1 \beta_1) (d_{\lambda+1} - d_\lambda) + (v_1 b_1 + w_1 \beta_1) \end{aligned}$$

Setzt man nun der Kürze wegen $d_{\lambda+1} - d_{\lambda} = s =$ Entfernung der letzten Fläche des ersten Systems zur ersten Fläche des zweiten, substituirt dann die Werthe von α_2 , β_2 , a_2 und b_2 in die Gleichungen des aus dem zweiten System austretenden Strahls, so erhält man hiefür:

$$y = [(t_2(t_1 s + v_1) + t_1 u_2) a_1 + (t_2(u_1 s + w_1) + u_1 u_2) \alpha_1] (x - d_u) + [(v_2(t_1 s + v_1) + t_1 w_2) a_1 + (v_2(u_1 s + w_1) + u_1 w_2) \alpha_1]$$

$$z = [(t_2(t_1 s + v_1) + t_1 u_2) b_1 + (t_2(u_1 s + w_1) + u_1 u_2) \beta_1] (x - d_u) + [(v_2(t_1 s + v_1) + t_1 w_2) b_1 + (v_2(u_1 s + w_1) + u_1 w_2) \beta_1]$$

und vergleicht man diese Gleichungen mit denen des aus der Verbindung der beiden Systeme austretenden Strahls, wie sie oben aufgestellt wurden, so erhält man:

$$(33.) \quad \dots \dots \dots \begin{cases} t = t_2 (t_1 s + v_1) + t_1 u_2 \\ u = t_2 (u_1 s + w_1) + u_1 u_2 \\ v = v_2 (t_1 s + v_1) + t_1 w_2 \\ w = v_2 (u_1 s + w_1) + u_1 w_2 \end{cases}$$

als Relationen, in welchen die Bestimmungsgrößen des zusammengesetzten Apparates zu denen der Theilapparate stehen.

Hiebei ist noch:

$$(uv - wt) = \frac{n_1}{n_{u+1}} = \frac{n_1}{n_{\lambda+1}} \cdot \frac{n_{\lambda+1}}{n_{u+1}} = (u_1 v_1 - w_1 t_1) (u_2 v_2 - w_2 t_2).$$

§. 20.

Nach Früherem ist $t = \frac{1}{f}$, $u = -\frac{g}{f}$, $v = \frac{g'}{f}$ und $w = \frac{ff' - gg'}{f}$; dieses in gehöriger Weise berücksichtigt, gehen obige Relationen (33) über in:

$$(34.) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{1}{f_2} \left(\frac{s}{f_1} + \frac{g'_1}{f_1} \right) + \frac{1}{f_1} \cdot \frac{-g_2}{f_2} = \frac{s + g'_1 - g_2}{f_1 f_2} \text{ oder } f = \frac{f_1 f_2}{(s + g'_1 - g_2)} \text{ und ebenso} \\ f' &= \frac{-f_1 f'_2}{s + g'_1 - g_2} \\ -\frac{g}{f} &= \frac{f_1 f'_1 - g_1 (s + g'_1 - g_2)}{f_1 f_2} = \frac{f'_1}{f_2} - \frac{g_1}{f} \quad \text{also } g = g_1 - f \frac{f'_1}{f_2} = g_1 - \frac{f_1 f'_1}{s + g'_1 - g_2} \\ \text{und } g_1 - g &= f \cdot \frac{f'_1}{f_2} \\ \frac{g'}{f} &= \frac{g'_2 (s + g'_1 - g_2) + f_2 f'_2}{f_1 f_2} = \frac{g'_2}{f} + \frac{f'_2}{f_1} \quad \text{also } g' = g'_2 + f \frac{f'_2}{f_1} = g'_2 + \frac{f_2 f'_2}{s + g'_1 - g_2} \\ \text{und } g'_2 - g' &= -f \cdot \frac{f'_2}{f_1} = -f' \frac{f_2}{f_1} \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Formeln sind leicht Hauptbrennweiten und Brennpunktsdistanzen des zusammengesetzten Systems aus den treffenden Größen der Theilsysteme und somit alle zur Beurtheilung der Wirkung des zusammengesetzten Systems nöthige Indicien zu schöpfen. Bedenkt man noch, daß für die Abscissen der Brennpunkte folgende Ausdrücke gehören:

Die Abcisse des vordern Brennpunkts des ganzen Systems	$x = d_1 - g$;
" " " hintern	" " " " $x = d_u - g'$;
" " " vordern	" " zweiten " $x = d_{\lambda+1} - g_2$;
" " " vordern	" " ersten " $x = d_1 - g_1$;
" " " hintern	" " " " $x = d_{\lambda} - g'_1$;
" " " hintern	" " zweiten " $x = d_u - g'_2$;

so ist $s + g'_1 - g_2 =$ Entfernung vom hintern Brennpunkt des ersten Systems zum vordern Brennpunkt des zweiten;

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_1 f'_1}{s + g'_1 - g_2} = g_1 - g &= \text{Entfernung vom vordern Brennpunkt des ersten Systems zum vordern Brennpunkt des zusammengesetzten;} \\ \frac{-f_2 f'_2}{s + g'_1 - g_2} = g'_2 - g' &= \text{Entfernung vom hintern Brennpunkt des zweiten Systems zum hintern Brennpunkt des zusammengesetzten;} \end{aligned} \right\} (35).$$

und wir können die drei Gleichungen (35) leicht in Worte kleiden, außerdem aber noch folgenden Satz durch Multiplikation derselben erhalten:

Das Produkt aus der hintern Hauptbrennweite des zusammengesetzten Systems in das Produkt der vordern Hauptbrennweiten der Theilsysteme ist = dem negativen Produkt aus der vordern Hauptbrennweite des zusammengesetzten Systems in das Produkt der hintern Hauptbrennweiten der Theilsysteme = gleich dem Produkt der drei Entfernungen der Brennpunkte untereinander, sowie sie in den Gleichungen (35) ausgesprochen sind.

Der vordere Hauptpunkt liegt von der vordern Fläche entfernt um die Gröfse

$$g + f = g_1 + \frac{f_1(f_2 - f'_1)}{s + g'_1 - g_2}$$

und der hintere Hauptpunkt liegt von der hintern Fläche entfernt um die Gröfse

$$g' + f' = g'_2 + \frac{f'_2(f_2 - f'_1)}{s + g'_1 - g_2}.$$

Für die Hauptpunkte hat man ferner noch folgende drei Relationen:

$$\left. \begin{aligned} s + (g'_1 - g_2) - (f_2 - f'_1) &= \text{Entfernung vom hintern Hauptpunkt des ersten Systems zum vordern Hauptpunkt des zweiten;} \\ (f_1 - f) + (g_1 - g) &= \frac{f_1(s + (g'_1 - g_2) - (f_2 - f'_1))}{s + g'_1 - g_2} = \text{Entfernung vom vordern Hauptpunkt des ersten zum vordern Hauptpunkt des zusammengesetzten Systems;} \\ (f'_2 - f') + (g'_2 - g') &= \frac{f'_2(s + (g'_1 - g_2) - (f_2 - f'_1))}{s + g'_1 - g_2} = \text{Entfernung vom hintern Hauptpunkt des zweiten Systems zum hintern Hauptpunkt des zusammengesetzten;} \end{aligned} \right\} (36.)$$

Diese Gleichungen enthalten verschiedene interessante Sätze, deren Aufstellung leicht genug ist, um hier weggelassen werden zu können.

Wendet man endlich auf den zusammengesetzten Apparat die Formeln (30) an, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon' &= \frac{g'_2(\epsilon - g_1)(s + g'_1 - g_2) + g'_2 f_1 f'_1 + (\epsilon - g_1) f_2 f'_2}{(\epsilon - g_1)(s + g'_1 - g_2) + f_1 f'_1} \\ v &= \frac{f_1 f'_2}{(\epsilon - g_1)(s + g'_1 - g_2) + f_1 f'_1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (37.)$$

§. 21.

Soll der zusammengesetzte Apparat als Fernrohr gelten, so ist $t = \frac{1}{f} = 0$; dies aber ereignet sich nach der ersten Gleichung von (34), wenn ist:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = 0, \text{ oder: } s + g'_1 - g_2 = 0,$$

d. h. wenn beide Theilapparate als Fernrohre wirken, oder wenn keiner ein Fernrohr ist, dabei aber die Entfernung des hintern Brennpunkts vom ersten zu dem vordern vom zweiten Apparat der Null gleich ist, also die genannten Brennpunkte in einem Punkt zusammenfallen; dies letztere ist der bekannte in den Elementen schon abgehandelte Fall und ist dies der am leichtesten erreichbare, weil es hierzu nicht mehr als zwei brechender Flächen bedarf.

In diesem Falle ist aus (37):

$$(38.) \quad \left\{ \begin{aligned} \epsilon' &= g'_2 + (\epsilon - g_1) \frac{f_2 f'_2}{f_1 f'_1} \\ v &= \frac{f_2}{f_1} \end{aligned} \right.$$

§. 22.

Ein centrirter Apparat ist oft auch als aus mehreren centrirten Systemen bestehend anzusehen, und sind dann seine Bestimmungsgrößen in Relation zu setzen mit denen der Theilapparate. Es ist aber nun leicht aus den Formeln (33) und (34) alles hieher gehörige zu entwickeln. Für drei Theilapparate z. B. sollen die zu ihnen gehörigen Bestimmungsgrößen mit den Indices 1, 2 und 3 bezeichnet werden. Betrachtet man nun die beiden ersten Apparate als in einen zusammengesetzt und bezeichnet die Bestimmungsgrößen desselben mit Buchstaben des großen Alphabets, so ist, wenn s_2 die Entfernung der letzten Fläche des zweiten zur ersten Fläche des dritten Systems bedeutet:

$$f = \frac{F f_3}{s_2 + G' - g_3}; \quad f' = -\frac{F' f'_3}{s_2 + G' - g_3}$$

$$g = G - \frac{F F'}{s_2 + G' - g_3}; \quad g' = g'_3 + \frac{f_3 f'_3}{s_2 + G' - g_3}$$

Substituirt man für die großen Buchstaben die Werthe aus (34) und schreibt s_1 für s , so erhält man:

$$(39.) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{f_1 f_2 f_3}{(s_1 + g'_1 - g_2)(s_2 + g'_2 + \frac{f_2 f'_2}{s_1 + g'_1 - g_2} - g_3)} = \frac{f_1 f_2 f_3}{(s_2 + g'_2 - g_3)(s_1 + g'_1 - g_2) + f_2 f'_2} \\ f' &= \frac{f'_1 f'_2 f'_3}{(s_2 + g'_2 - g_3)(s_1 + g'_1 - g_2) + f_2 f'_2} \\ g &= g_1 - \frac{f_1 f'_1}{s_1 + g'_1 - g_2} + \frac{f_1 f_2 f'_1 f'_2}{(s_1 + g'_1 - g_2)^2 (s_2 + g'_2 + \frac{f_2 f'_2}{s_1 + g'_1 - g_2} - g_3)} = \\ &= g_1 - \frac{f_1 f'_1}{s_1 + g'_1 - g_2} + \frac{f_1 f_2 f'_1 f'_2}{(s_1 + g'_1 - g_2)((s_2 + g'_2 - g_3)(s_1 + g'_1 - g_2) + f_2 f'_2)} = \\ &= \frac{g_1((s_2 + g'_2 - g_3)(s_1 + g'_1 - g_2) + f_2 f'_2) - f_1 f'_1(s_2 + g'_2 - g_3)}{(s_2 + g'_2 - g_3)(s_1 + g'_1 - g_2) + f_2 f'_2} \\ g' &= \frac{g_3((s_2 + g'_2 - g_3)(s_1 + g'_1 - g_2) + f_2 f'_2) + f_3 f'_3(s_1 + g'_1 - g_2)}{(s_2 + g'_2 - g_3)(s_1 + g'_1 - g_2) + f_2 f'_2} \end{aligned} \right.$$

Sowie $s_1 + g'_1 - g_2$ die Entfernung vom hintern Brennpunkt des ersten Systems zum vordern des zweiten bedeutet, so stellt jetzt $s_2 + g'_2 - g_3$ die Entfernung des hintern Brennpunkts vom zweiten System zum vordern Brennpunkt des dritten Systems vor.

Will man die Bildweite und die Vergrößerungszahl eines aus drei andern bestehenden Systems durch die Bestimmungsgrößen der letztern ausgewerthet haben, so darf man nur in die Formeln (30) die eben entwickelten Ausdrücke einsetzen.

§. 23.

Für den Fall, daß ein System aus λ Theilsystemen besteht, nimmt man die $\lambda - 1$ vordern Systeme in eines vereinigt an, bezeichnet die hieher gehörigen Bestimmungsgrößen mit $F_{\lambda-1}, F'_{\lambda-1}, G_{\lambda-1}, G'_{\lambda-1}$ und hat alsdann, wenn man mit $f_{\lambda}, f'_{\lambda}, g_{\lambda}, g'_{\lambda}$ die beziehlichen Bestimmungsstücke des λ^{ten} Theilsystems und mit $s_{\lambda-1}$ die Entfernung der hintern Fläche des $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ zur vordern Fläche des λ^{ten} Systems bezeichnet nach (34):

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{F_{\lambda-1} \cdot f_{\lambda}}{s_{\lambda-1} - g_{\lambda} + G'_{\lambda-1}} \\ f' &= \frac{-F'_{\lambda-1} f_{\lambda}}{s_{\lambda-1} - g_{\lambda} + G'_{\lambda-1}} \\ g &= G_{\lambda-1} - \frac{F_{\lambda-1} F'_{\lambda-1}}{s_{\lambda-1} - g_{\lambda} + G'_{\lambda-1}} \\ g' &= g'_{\lambda} + \frac{f_{\lambda} f'_{\lambda}}{s_{\lambda-1} - g_{\lambda} + G'_{\lambda-1}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40.)$$

Substituirt man hier die bereits berechneten Werthe von $F_{\lambda-1}, F'_{\lambda-1}, G_{\lambda-1}$ und $G'_{\lambda-1}$, so erhält man die verlangten Ausdrücke. Wird nun kurzweg gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= s_1 + g'_1 - g_2 \\ x_2 &= s_2 + g'_2 - g_3 \\ x_3 &= s_3 + g'_3 - g_4 \\ &\dots \dots \dots \\ x_{\mu-1} &= s_{\mu-1} + g'_{\mu-1} - g_{\mu} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (41.)$$

wobei diese Größen ähnliche geometrische Bedeutungen wie x_1 haben, so z. B. ist $x_{\mu-1}$ die Entfernung des hintern Brennpunktes des $\mu - 1^{\text{ten}}$ Systems zum vordern des μ^{ten} ; und ist ferner:

$$\left. \begin{aligned} N_{\mu-2} &= x_{\mu-1} N_{\mu-3} + f_{\mu-1} f'_{\mu-1} N_{\mu-4} \\ N_{\mu-3} &= x_{\mu-2} N_{\mu-4} + f_{\mu-2} f'_{\mu-2} N_{\mu-5} \\ &\dots \dots \dots \\ N_4 &= x_5 N_3 + f_5 f'_5 N_2 \\ N_3 &= x_4 N_2 + f_4 f'_4 N_1 \\ N_2 &= x_3 N_1 + f_3 f'_3 x_1 \\ N_1 &= x_2 x_1 + f_2 f'_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42.)$$

so sind folgende Resultate leicht zu finden:

Für zwei Systeme:

$$f = \frac{f_1 f_2}{x_1}, f' = -\frac{f'_1 f'_2}{x_1}, g = g_1 - \frac{f_1 f'_1}{x_1}, g' = g'_2 + \frac{f_2 f'_2}{x_1}$$

Für drei Systeme:

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3}{N_1}, f' = \frac{f'_1 f'_2 f'_3}{N_1}, g = g_1 - \frac{f_1 f'_1}{x_1} + \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2}{x_1 N_1}, g' = g'_3 + \frac{x_1 f_3 f'_3}{N_1}$$

Für vier Systeme:

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3 f_4}{N_2}, f' = -\frac{f'_1 f'_2 f'_3 f'_4}{N_2}, g = g_1 - \frac{f_1 f'_1}{x_1} + \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2}{x_1 N_1} - \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2 f_3 f'_3}{N_1 N_2}, g' = g'_1 + \frac{f_4 f'_4 \cdot N_1}{N_2}.$$

Für fünf Systeme:

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3 f_4 f_5}{N_3}, f' = +\frac{f'_1 f'_2 f'_3 f'_4 f'_5}{N_3}, g = g_1 - \frac{f_1 f'_1}{x_1} + \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2}{x_1 N_1} - \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2 f_3 f'_3}{N_1 N_2} + \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2 f_3 f'_3 f_4 f'_4}{N_2 N_3},$$

$$g' = g'_1 + \frac{f_5 f'_5 N_2}{N_3}.$$

Für sechs Systeme:

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 f_6}{N_4} \text{ u. s. w.}$$

Hieraus ergeben sich leicht die Ausdrücke für ein System aus μ Theilsystemen bestehend, nämlich:

$$(43.) \dots \begin{cases} f = \frac{f_1 f_2 f_3 f_4 \dots f_\mu}{N_{\mu-2}}; f' = (-1)^{\mu-1} \frac{f'_1 f'_2 f'_3 \dots f'_\mu}{N_{\mu-2}}; \\ g = g_1 - \frac{f_1 f'_1}{x_1} + \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2}{x_1 N_1} - \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2 f_3 f'_3}{N_1 N_2} + \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2 f_3 f'_3 f_4 f'_4}{N_2 N_3} \\ \dots \dots \dots (-1)^{\mu-1} \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2 f_3 f'_3 \dots f_{\mu-1} f'_{\mu-1}}{N_{\mu-3} N_{\mu-2}}; g' = g'_\mu + \frac{f_\mu f'_\mu N_{\mu-3}}{N_{\mu-2}} \end{cases}$$

§. 24.

Für einen aus mehreren Theilsystemen bestehenden Apparat findet man die Vergrößerungszahl und die Entfernungen des Bildes von der letzten Fläche leicht nach (30), wenn man die Bestimmungsgrößen f, f', g und g' vorerst für den ganzen Apparat aufgesucht hat; allein sie lassen sich auch in den Bestimmungsgrößen der Theilsysteme auswerthen. Mit Hülfe der Formeln (30), (41), (42) und (43), sowie noch einiger leichten Reductionen ergeben sich nämlich nachstehende Resultate:

Für einen Apparat aus einem System: $v = -\frac{f'_1}{\varepsilon - g_1}$

„ „ „ „ zwei Systemen: $v = \frac{f'_1 f'_2}{(\varepsilon - g_1) x_1 + f_1 f'_1}$

„ „ „ „ drei „ $v = \frac{-f'_1 f'_2 f'_3}{(\varepsilon - g_1) N_1 + f_1 f'_1 x_2}$

„ „ „ „ vier „ $v = \frac{f'_1 f'_2 f'_3 f'_4}{(\varepsilon - g_1) N_2 + f_1 f'_1 N'_1}$

„ „ „ „ fünf „ $v = \frac{-f'_1 f'_2 f'_3 f'_4 f'_5}{(\varepsilon - g_1) N_3 + f_1 f'_1 N'_2}$

und der Analogie nach für einen Apparat, der aus μ Theilsystemen besteht:

$$(44.) \dots \dots \dots v = (-1)^\mu \frac{f'_1 f'_2 f'_3 \dots f'_\mu}{(\varepsilon - g_1) N_{\mu-2} + f_1 f'_1 N'_{\mu-3}} \dots$$

Außer den bereits definirten Größen sind hier noch die accentuirten N als solche zu nehmen, welche mit den gleich indicirten und nicht accentuirten gleiche Zusammensetzung, die Indices der darin vorkommenden Größen jedoch um 1 erhöht, haben, so ist z. B.:

$$N_1 = x_2 x_1 + f_2 f'_2, \text{ sowie } N_2 = x_3 x_2 x_1 + x_3 f_2 f'_2 + x_1 f_3 f'_3 \text{ u. s. f., dagegen}$$

$$N'_1 = x_3 x_2 + f_3 f'_3, \text{ sowie } N'_2 = x_4 x_3 x_2 + x_4 f_3 f'_3 + x_2 f_4 f'_4.$$

Nach (30) ist ferner $\varepsilon' = g' - f v$, somit ist bei einem Apparat der aus μ Theilsystemen zusammengesetzt ist, die Entfernung der Bildebene von der letzten Fläche, zu dieser hin gemessen und dann gehörig nach §. 3 qualificirt:

$$\varepsilon' = g'_\mu + \frac{f_\mu f'_\mu N_{\mu-2}}{N_{\mu-2}} + (-1)^{\mu-1} \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2 \dots f_\mu f'_\mu}{N_{\mu-2} ((\varepsilon - g_1) N_{\mu-2} + f_1 f'_1 N_{\mu-3})} \dots \quad (45.)$$

und diese Formeln gelten von $\mu=1$ an, wenn man noch nachstehende Definitionen festhält:

$$N_{-2} = N'_{-2} = 0, \quad N_{-1} = N'_{-1} = 1, \quad N_0 = x_1 \quad \text{und} \quad N'_0 = x_2. \dots \quad (46.)$$

§. 25.

Wir können nun auch zur Berechnung des Ganges der Lichtstrahlen durch ein System von Kugelflächen die Formeln (41), (42) und (43) benützen. Es ist nämlich aus Früherem bekannt, daß man zur Fixirung der Lage des gebrochenen Strahls nur die Größen f , g , f' und g' (weil nämlich nach der Gleichung (29) hiedurch auch t , u , v , w bekannt sind) zu wissen nöthig hat. Letztere Größen sind aber durch die Formeln (43) gegeben, wenn man zuerst aus (41) die x und aus (42) die N berechnet hat. Die s , welche dann in den Formeln für die x vorkommen, sind die Entfernungen der Flächen von einander. Die g und g' bedeuten die Brenndistanzen, sowie die f und f' die Haupt-Brennweiten der einzelnen Flächen, welche Größen man auch leicht unmittelbar durch die Elemente des Apparates selbst ausdrücken kann.

Mittels des Systems der Gleichungen (42), das die im Abschnitte A näher betrachteten Eigenschaften hat und wo die Bestimmungsgrößen mit x_1 , N_1 , $N_2 \dots N_{\mu-2}$, die Coefficienten p mit $x_2, x_3 \dots x_{\mu-1}$, die Coefficienten q mit $f_2 f'_2, f_3 f'_3 \dots f_{\mu-1} f'_{\mu-1}$ bezeichnet sind, lassen sich die N leicht finden.

Da man nach Früherem für eine Fläche

$$f_1 = g'_1 = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{r_1}{1 - \frac{n_2}{n_1}} \right) \quad \text{und} \quad f'_1 = g_1 = - \frac{r_1}{1 - \frac{n_2}{n_1}}$$

hat, so erhält man für die Coefficienten des Systems folgende Werthe:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= s_1 + \frac{n_2}{n_1} \frac{r_1}{1 - \frac{n_2}{n_1}} + \frac{r_2}{1 - \frac{n_3}{n_2}} & f_2 f'_2 &= - \frac{n_3}{n_2} \left(\frac{r_2}{1 - \frac{n_3}{n_2}} \right)^2 \\ x_2 &= s_2 + \frac{n_3}{n_2} \frac{r_2}{1 - \frac{n_3}{n_2}} + \frac{r_3}{1 - \frac{n_4}{n_3}} & f_3 f'_3 &= - \frac{n_4}{n_3} \left(\frac{r_3}{1 - \frac{n_4}{n_3}} \right)^2 \\ &\dots & & \\ x_{\mu-1} &= s_{\mu-1} + \frac{n_\mu}{n_{\mu-1}} \left(\frac{r_{\mu-1}}{1 - \frac{n_\mu}{n_{\mu-1}}} \right) + \frac{r_\mu}{1 - \frac{n_{\mu+1}}{n_\mu}} & f_{\mu-1} f'_{\mu-1} &= - \frac{n_{\mu+1}}{n_\mu} \left(\frac{r_\mu}{1 - \frac{n_{\mu+1}}{n_\mu}} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (47.)$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke, dann der Gleichungen (29), (43), (44) und (45) ist die Berechnung des Ganges eines Lichtstrahls durch ein System von Flächen einfacher, als wie es durch die Gleichungen von §. 4 geschehen kann, indem das System dort $\mu+1$ Gleichungen mehr als das in (47) enthält.

Ist der ganze Apparat nur eine Fläche, so ist nach diesem:

$$v = - \frac{1}{\frac{\varepsilon}{g} - 1} \quad \text{und} \quad \varepsilon' = \frac{n_2}{n_1} \varepsilon v \dots \quad (48.)$$

§. 26.

Wird ein optischer Apparat umgewendet, so wird die erste Fläche zur letzten, die zweite zur zweitletzten und so weiter. Hieraus fließen folgende Aenderungen:

Aus $n_{\mu+1}$ wird n_1 , aus r_μ wird $-r_1$ und aus $s_{\mu-1}$ wird s_1

$$n \quad n_{\mu} \quad n \quad n_2 \quad n \quad r_{\mu-1} \quad n \quad -r_2 \quad n \quad n \quad s_{\mu-2} \quad n \quad s_2$$

und diese Formeln gelten von $n = 1$ an, wenn man noch nachstehende Definitionen festsetzt:

" $n_{\mu-x+1}$ wird n_{x+1} , aus $r_{\mu-x}$ wird $-r_{x+1}$ und aus $s_{\mu-x-1}$ wird s_{x+1}

endlich

„ n_1 wird n_{u+1} aus r_1 wird $-r_u$ und aus s_1 wird s_{u-1} .

Nun war aber für eine Fläche:

$$f_{\mu-x} = g'_{\mu-x} = \frac{n_{\mu-x+1} r_{\mu-x}}{n_{\mu-x} - n_{\mu-x+1}}$$

$$f_{\mu-x} = g_{\mu-x} = - \frac{n_{\mu-x} r_{\mu-x}}{n_{\mu-x} - n_{\mu-x+1}}$$

aus letzteren Ausdrücken wird durch das Umwenden:

aus $f_{\mu-x}$ wird $\frac{-n_{x+1} r_{x+1}}{n_{x+2} - n_{x+1}} = \frac{n_{x+1} r_{x+1}}{n_{x+1} - n_{x+2}} = -f'_{x+1} = -g_{x+1}$ der neuen Lage

und

aus $f_{\mu-x}$ wird $+\frac{n_{x+2} r_{x+1}}{n_{x+2} - n_{x+1}} = -\frac{n_{x+2} r_{x+1}}{n_{x+1} - n_{x+2}} = -f_{x+1} = -g'_{x+1}$ der neuen Lage.

Ferner war :

$$x_{\mu-x-1} = s_{\mu-x-1} + g'_{\mu-x-1} - g_{\mu-x}$$

dies geht über in:

$$s_{x+1} - g_{x+2} + g'_{x+1} = x_{x+1}.$$

Es bleiben somit die Brennpunkte der einzelnen Flächen an ihren Orten, nur sind die vordern Brennpunkte der alten Lage zu hintern Brennpunkten der neuen geworden und umgekehrt. Das System der Gleichungen (42) ändert sich in ein anderes um, das dieselben Coefficienten wie jenes besitzt und es bedarf nur einer kurzen Ueberlegung, um zum Schlusse zu kommen, daß die neuen N im Allgemeinen verschieden sind von den alten N , daß aber in beiden Fällen $N_{\mu-2}$ denselben Werth hat; woraus sogleich weiter folgt, daß die Hauptbrennweiten des ganzen Apparates in der alten Lage sich in soferne von denen in der neuen Lage unterscheiden, daß die vordere und hintere Hauptbrennweite beziehungsweise nun zur negativen hintern und vordern Hauptbrennweite wird, die Brennpunktsdistanzen dagegen ganz verschieden sein können.

Ein Apparat, der in der ersten Lage Fernrohrwirkung hat, hat sie nach diesen Umständen auch in der zweiten. Die Vergrößerungszahl in der zweiten ist aber offenbar der reciproke Werth in der ersten. Denn denkt man sich den Apparat aus zweien zusammengesetzt, mit den Hauptbrennweiten F_1 , F'_1 , F_2 und F'_2 , so gehen diese Werthe in der neuen Lage über in $-F'_2$, $-F_2$, $-F'_1$ und $-F_1$. Die Vergrößerungszahl in der ersten Lage war nach §. 21

$v = \frac{F_2}{F_1}$ und ist in der neuen $v' = \frac{-F_1}{-F_2}$ also $v' = \frac{1}{v}$.

VI.

Von den Linsen, Linsensystemen und vom Auge. Lupe, Mikroskop, Stöpsel-
perspektiv und Fernrohr.

§. 27.

Besteht ein optischer Apparat nur aus zwei Kugelflächen, die ein Medium zwischen sich abschliessen, so heisst man ihn eine Linse.

Für eine Linse, die sich in atmosphärischer Luft befindet, ist: $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = \nu =$ Brechungsexponent des Mediums, welches von den Kugelflächen abgegränzt wird, und das gewöhnlich Glas ist, dessen Exponent je nach seiner chemischen Beschaffenheit zumeist zwischen den Gränzen 1, 5 und 1, 8 variirt. Ferner ist $r_1 = \rho =$ Radius der den auffallenden Strahlen zugekehrten oder vordern Fläche und $r_2 = \rho' =$ Radius der hintern Kugelfläche. Endlich ist $d_2 - d_1 = \delta$ die sogenannte Dicke der Linse.

Wir haben nun für eine Linse:

$$t = t_2(t_1 s + v_1) + t_1 u_2 = (\nu - 1) \cdot \frac{1}{\rho'} \left(-\frac{\nu - 1}{\nu} \frac{\delta}{\rho} + 1 \right) - \frac{(\nu - 1)}{\rho}$$

$$u = t_2(u_1 s + w_1) + u_1 u_2 = \frac{\nu - 1}{\rho'} \left(\frac{\delta}{\nu} \right) + 1$$

$$v = v_2(t_1 s + v_1) + t_1 w_2 = -\frac{\nu - 1}{\nu} \frac{\delta}{\rho} + 1$$

$$w = v_2(u_1 s + w_1) + u_1 w_2 = \frac{\delta}{\nu};$$

oder es sind die Bestimmungsgrößen für eine Linse:

$$\left. \begin{aligned} t &= (\nu - 1) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} - \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\rho \rho'} \right) \\ u &= 1 + \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\rho'} \\ v &= 1 - \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\rho} \\ w &= \frac{\delta}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (49.)$$

Weil $\frac{\nu - 1}{\nu}$ ein ächter Bruch und wenigstens für Glaslinsen nicht gröfser als $\frac{1}{2}$ ist, so

werden sich die Gröfsen u und v , zumal wenn $\frac{\delta}{\rho}$ und $\frac{\delta}{\rho'}$ kleine Zahlen sind, welches der Fall ist, sobald die Radien weit gröfsere Werthe als die Dicken haben, nicht viel von der Einheit unterscheiden.

Ferner ist:

$$\left. \begin{aligned} f &= \frac{1}{t} = \frac{1}{(\nu - 1) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} - \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\rho \rho'} \right)} \\ f' &= -f = \frac{-1}{(\nu - 1) \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} - \frac{\nu - 1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\rho \rho'} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (50.)$$

$$(50.) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} g = -fu &= \frac{-(1 + \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho'})}{(\nu-1)(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho\varrho'})} \\ g' = fv &= \frac{(1 - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho})}{(\nu-1)(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho\varrho'})} \end{aligned} \right.$$

Wenn die vordere Hauptbrennweite einer Linse negativ, also die hintere positiv ist, so heisst man die Linse *Convex-* oder *Sammellinse*. Ist dagegen die vordere Hauptbrennweite positiv und demnach die hintere negativ, so wird die Linse eine *Concav-* oder *Zerstreuungslinse* genannt. Ersteres ereignet sich, wenn in dem Nenner der eingeschlossene Factor negativ und letzteres, wenn er positiv ist. In dem gewöhnlichen Falle, wo $\frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho} < 1$ ist, haben g und g' entgegengesetzte Qualität, d. h. die Brennpunkte liegen auf verschiedenen Seiten der Linse. Gewöhnlich versteht man unter Brennweite einer Linse die von uns mit g' bezeichnete Brenndistanz; wie wir sehen ist diese nur dann mit unserer sogenannten ersten Hauptbrennweite identisch, wenn v der Einheit sehr nahe kommt, was, wie wir gesehen haben, nur bei jenen Linsen der Fall ist, wo $\frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho}$ vernachlässigt werden kann. Die absoluten Grössen der Brenndistanzen unterscheiden sich, wenn u und v nahehin der Einheit gleich sind, wenig von einander. Die Hauptpunkte sind von den Brennpunkten um f und f' entfernt; deshalb haben sie zu den entsprechenden Flächen der Linsen die Entfernungen:

$$(51.) \dots \left\{ \begin{array}{ll} \text{vorderer Hauptpunkt:} & \text{hinterer Hauptpunkt:} \\ h = \frac{-\frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho'}}{(\nu-1)(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho\varrho'})} & h' = \frac{-\frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho}}{(\nu-1)(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho\varrho'})} \end{array} \right.$$

Weil die Zähler der beiden Brüche nicht sehr gross sind, so liegen auch die Hauptpunkte wenig von den Linsenflächen entfernt, können übrigens auf gleichen oder entgegengesetzten Seiten derselben liegen, letzteres, wenn die Radien der Linsen verschiedene, ersteres, wenn sie gleiche Qualität besitzen; in jedem Falle aber verhalten sich die Entfernungen der Hauptpunkte von ihren Flächen, wie die Radien der letztern. Die Congruenzpunkte fallen mit den Hauptpunkten zusammen. Die Gegenpunkte haben von den Linsenflächen die Entfernungen:

$$(52.) \dots \dots \left\{ \begin{array}{ll} \text{vorderer Gegenpunkt:} & \text{hinterer Gegenpunkt:} \\ i = \frac{-(2 + \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho'})}{(\nu-1)(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho\varrho'})} & i' = \frac{2 - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho}}{(\nu-1)(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho\varrho'})} \end{array} \right.$$

und sind somit, wenn $\frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho'}$ und $\frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho}$ sehr klein sind, beinahe doppelt so weit von den entsprechenden Linsenflächen entfernt, als wie die respektiven Brennpunkte. Aus den Gleichungen (30) folgt:

$$(53.) \dots \dots \left\{ v = \frac{1}{1 + \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho'} + (\nu-1) \cdot \left\{ \frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho\varrho'} \right\} \varepsilon} \right. \text{ und}$$

$$\epsilon' = \frac{(1 - \frac{\nu-1}{\nu} \frac{\delta}{\rho}) - \nu}{(\nu-1)(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} - \frac{\nu-1}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\rho \rho'})} \dots \dots \dots (54.)$$

Wie wir sehen ist für den Fall, als δ vernachlässigt werden darf, $\epsilon' = \epsilon \nu$, was auch in den Elementen so gelehrt wird.

Ist die Linse eine Kugel, so ist $\rho' = -\rho$ und $\delta = 2\rho$, folglich:

$$f = \frac{1}{(\nu-1)(-\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} + \frac{2(\nu-1)}{\nu \rho})} = \frac{-\nu \rho}{2(\nu-1)}; f' = \frac{\nu \rho}{2(\nu-1)}$$

$$g = \frac{2-\nu}{2(\nu-1)} \rho; g' = -\frac{2-\nu}{2(\nu-1)} \rho$$

$$h = -\rho; h' = +\rho.$$

Es liegen also die Hauptpunkte im Centrum der Kugel, welche Eigenschaft übrigens auch leicht auf anderem Wege zu erkennen ist.

§. 28.

Wir sind nun auch in Stand gesetzt, eine nicht uninteressante Vergleichung des Ganges eines Lichtstrahls durch ein System von brechenden Flächen mit dem durch eine einzige Fläche oder eine einzige Linse aufzustellen. Wir erhalten die Gleichungen für einen durch ein System gehenden Strahl beziehlich der Congruenzebene, wo also

$$\xi = d_1 - \frac{1}{t} (\frac{n_1}{n_{\mu+1}} - u), \xi' = d_\mu - \frac{1}{t} (\nu - 1)$$

ist, als folgende:

einfallender Strahl:

$$y = \alpha (x - \xi) + a$$

$$z = \beta (x - \xi) + b$$

gebrochener Strahl:

$$y = (t a + \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \alpha) (x - \xi') + a$$

$$z = (t b + \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \beta) (x - \xi') + b.$$

Die Gleichung eines an einer Fläche abgelenkten Strahles ist, wenn das vordere Medium den Index n_1 , das hintere den Index $n_{\mu+1}$ hat.

$$y = \alpha (x - d) + a$$

$$y = \left(\frac{n_1 - n_{\mu+1}}{n_{\mu+1} r} a + \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \alpha \right) (x - d) + a$$

$$z = \beta (x - d) + b$$

$$z = \left(\frac{n_1 - n_{\mu+1}}{n_{\mu+1} r} b + \frac{n_1}{n_{\mu+1}} \beta \right) (x - d) + b.$$

Ist nun $d = \xi$, d. h. setzt man die brechende Fläche in den ersten Congruenzpunkt, und

ist ferner $\frac{n_1 - n_{\mu+1}}{n_{\mu+1} r} = t$ oder $r = \frac{n_1 - n_{\mu+1}}{n_{\mu+1} t}$ so hat der an dieser Fläche einmal gebrochene

Strahl zu der in ihrem Axenpunkt liegenden Bestimmungsebene dieselbe Lage, wie der durch ein System gehende Strahl zur hintern Congruenzebene. Man kann also den aus einem System tretenden Strahl darstellen, wenn man in dem ersten Congruenzpunkt des Systems eine

brechende Fläche von dem Radius $\frac{n_1 - n_{\mu+1}}{n_{\mu+1}} \cdot \frac{1}{t} = \frac{n_1 - n_{\mu+1}}{n_{\mu+1}} f$ und eine sie tangirende Ebene

construirt und hiezu jetzt die abgelenkten Strahlen aufsucht, diese Strahlen setzt man alsdann noch zur zweiten Congruenzebene in dieselbe Beziehung, die sie zu der die angenommene Fläche berührenden Ebene haben.

Ist das letzte Medium dem ersten gleich, so ist diese Vergleichung nicht anwendbar, da dann der Strahl an der einen Fläche keine Ablenkung erleiden könnte. In diesem Falle sind die Gleichungen des durch das System gehenden Strahls mit der Hauptebene in Beziehung gesetzt:

$$\begin{aligned} y &= \alpha(x - \xi) + a & y &= (t\alpha + \alpha)(x - \xi') + a \\ z &= \beta(x - \xi) + b & z &= (t\beta + \beta)(x - \xi') + b. \end{aligned}$$

Die Gleichungen eines Strahls, der durch eine Linse geht, bei welcher die Dicke verhältnißmäßig gering angenommen werden kann, und die sich im ersten Congruenzpunkt befindet, sind nach (7), weil hier $u=v=1$, $w=0$ und $t=(\nu-1)(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho})=t'$ ist:

$$\begin{aligned} y &= \alpha(x - \xi) + a & y &= (t'\alpha + \alpha)(x - \xi) + a \\ z &= \beta(x - \xi) + b & z &= (t'\beta + \beta)(x - \xi) + b. \end{aligned}$$

In diesem Falle hat also der aus dem System tretende Strahl zur hintern Hauptebene dieselbe Lage als wie er sie zur vordern Hauptebene hätte, wenn im vordern Hauptpunkt eine Linse von außerordentlicher Dünne und derselben Hauptbrennweite, die das System hat, statt desselben wirkte.

Man kann also immer für ein System von brechenden Flächen entweder eine Fläche oder eine außerordentliche dünne Linse substituiren und hieran die Betrachtungen machen.

§. 29.

Wenn man eine Linse umwendet, so daß in dem Punkt, wo die vordere Fläche die Axe geschnitten hat, nun die hintere Fläche steht, so bekommen die Radien die entgegengesetzte Qualität und tauschen die Accente, alles übrige bleibt; also ist für die umgewendete Linse:

$$t = (\nu - 1) \left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} - \frac{(\nu - 1)}{\nu} \cdot \frac{\delta}{\varrho \varrho'} \right)$$

$$u = 1 - \frac{\nu - 1}{\nu} \frac{\delta}{\varrho}$$

$$v = 1 + \frac{\nu - 1}{\nu} \frac{\delta}{\varrho'}$$

$$w = \frac{\delta}{\nu}$$

Die Linse hat also umgewendet dasselbe t und w , wie vorher, dagegen tauschen u und v gegenseitig ihre Werthe.

Wenn somit diese letztern Größen nur wenig verschieden sind, was sich bei geringer Dicke der Linse ereignet, so hat die Linse in beiden Lagen dieselbe Wirkung; ist das aber nicht der Fall, so hat man für die umgewendete Linse zwar für f und f' dieselben Werthe wie vorher, aber für die Brenndistanzen hat man in der ursprünglichen Lage $g = -\frac{u}{t}$, $g' = \frac{v}{t}$ und jetzt in

der umgewendeten $g = -\frac{v}{t}$ und $g' = \frac{u}{t}$, d. h.: Soweit, als der vordere Brennpunkt vor der ersten Fläche war, ist jetzt der hintere Brennpunkt hinter der letzten Fläche und soweit, als der hintere Brennpunkt vor der letzten Fläche war, ist jetzt der vordere Brennpunkt hinter der ersten,

oder die g und g' vertauschen die Werthe und wenden dabei die Qualitäten in die entgegengesetzten um und dies heisst in der That nichts weiter, als dafs die Brennpunkte bei dem Umdrehen der Linse an demselben Orte, an welchem sie vorher waren, bleiben und nur den Namen tauschen. Ganz genau so ist es auch mit den Lagen der Hauptpunkte zu den Linsenflächen, denn es ist:

für die ursprüngliche Lage:

$$h = \frac{1-u}{t}$$

$$h = \frac{v-1}{t}$$

umgewendet:

$$\frac{1-v}{t} = -\frac{v-1}{t}$$

$$\frac{u-1}{t} = -\frac{1-u}{t}$$

Dafs und wie sich ε' und v ändern, ist ebenfalls leicht einzusehen.

§. 30.

Soll eine einzige Linse Fernrohr-Wirkung haben, so mufs, wenn sich die Gröfsen f_1, f_2, g_1, g_2, g'_1 und g'_2 , in gehöriger Weise genommen, auf die erste oder zweite Fläche beziehen, entweder $\frac{1}{f_1} = \frac{1}{f_2} = 0$ sein, dieses aber bedingt $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'} = \infty$, d. h. die Linse ist eine plan- und parallel-geschliffene Platte, hiefür aber ist $v = v' = u = 1$ und man hat alsdann keine Vergrößerung also auch nicht die gewünschte Wirkung; oder es ist die Bedingung erfüllt: $s + g'_1 - g_2 = 0$, was in unserm Falle heisst:

$$\delta - \frac{\varrho v}{v-1} + \frac{v \varrho'}{v-1} = 0 \text{ oder } \delta(v-1) - v(\varrho - \varrho') = 0,$$

$$\text{daraus folgt: } \frac{\delta(v-1)}{v} = (\varrho - \varrho') \text{ ferner: } u = \frac{\varrho}{\varrho'}, v = \frac{\varrho'}{\varrho}, w = \frac{\varrho - \varrho'}{v-1}, \dots (52)$$

wobei v die Vergrößerungszahl ist.

Wird ein solches Fernrohr, welches man Stöpselperspektiv heisst, umgewendet, so bleibt $t=0$, es wirkt also auch dann noch als Fernrohr; jetzt aber ist die Vergrößerungszahl $=u$ und somit der reciproke Werth der erstern. Ferner sehen wir, dafs, wenn δ sehr dünn, und deshalb von der Null wenig verschieden ist, so ist ϱ nahezu $=\varrho'$, daher auch die Vergrößerungszahl nicht viel von der Einheit verschieden; um somit eine auch nur einigermaßen merkbare Vergrößerungszahl zu erhalten, bedarf das Stöpselperspektiv einer ziemlichen Dicke.

Für die Entfernung des Bildes hat man bei diesem Apparat $\varepsilon' = \frac{\varrho'}{\varrho} \left(\frac{\varrho - \varrho'}{v-1} + \frac{\varrho'}{\varrho} \varepsilon \right)$.

§. 31.

Wenn man die Wirkung eines Systems von Linsen zu berechnen hat, deren einzelne Bestimmungsgrößen als bekannt anzunehmen sind, so wird man den ganzen Apparat als aus so vielen Theilapparaten bestehend ansehen, als man Linsen hat.

Nach Gleichung (41) ist dann ferner:

$$x_i = s_i + g'_i - g_{i+1}$$

und hier bedeutet x_i die Entfernung des hintern Brennpunktes der i^{ten} Linse zum vordern der $i+1^{\text{ten}}$ Linse, ebenso s_i die Distanz der hintern Fläche der i^{ten} zur vordern der $(i+1)^{\text{ten}}$ Linse, ferner ist g'_i die hintere Brenndistanz der i^{ten} und g_{i+1} die vordere der $i+1^{\text{ten}}$ Linse, also nach (50):

$$g_i = \frac{1 - \frac{\nu_i - 1}{\nu_i} \cdot \frac{\delta_i}{\varrho_i}}{(\nu_i - 1) \left(\frac{1}{\varrho_i'} - \frac{1}{\varrho_i} - \frac{\nu_i - 1}{\nu_i} \frac{\delta_i}{\varrho_i \varrho_i'} \right)};$$

$$g_{i+1} = - \frac{1 + \frac{\nu_{i+1} - 1}{\nu_{i+1}} \frac{\delta_{i+1}}{\varrho_{i+1}'}}{(\nu_{i+1} - 1) \left(\frac{1}{\varrho_{i+1}'} - \frac{1}{\varrho_{i+1}} - \frac{\nu_{i+1} - 1}{\nu_{i+1}} \frac{\delta_{i+1}}{\varrho_{i+1} \varrho_{i+1}'} \right)}.$$

Endlich ist nach (42):

$$N_{i-1} = x_i N_{i-2} + f_i f_i' N_{i-3} = x_i N_{i-2} - (f_i)^2 N_{i-3},$$

wo:

$$f_i = \frac{1}{(\nu_i - 1) \left(\frac{1}{\varrho_i'} - \frac{1}{\varrho_i} - \frac{\nu_i - 1}{\nu_i} \frac{\delta_i}{\varrho_i \varrho_i'} \right)}.$$

Dieses Alles berücksichtigt, erhält man nach (43) für einen Apparat, der aus x Linsen zusammengesetzt ist:

$$(55.) \dots \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{f_1 f_2 \dots f_x}{N_{x-2}}; \quad f' = -f; \quad g = g_1 + \frac{f_1^2}{x_1} + \frac{f_1^2 f_2^2}{x_1 N_1} + \frac{f_1^2 f_2^2 f_3^2}{N_1 N_2} + \dots + \frac{f_1^2 f_2^2 \dots f_{x-1}^2}{N_{x-2} N_{x-3}} \\ \text{und } g' &= g_x - \frac{f_x^2 N_{x-3}}{N_{x-2}}. \end{aligned} \right.$$

Da man zur Bestimmung aller N nur $(x-2)$ recurrirende Gleichungen nöthig hat, während nach den Formeln des §. 4. $4x-1$ derselben aufgestellt werden müßten, so ist natürlich letztere Berechnungsweise unter Umständen vorzuziehen.

Die Vergrößerungszahl für ein System von x Linsen ist nach (44) und (45):

$$(56.) \dots \left\{ \begin{aligned} v &= \frac{f_1 f_2 f_3 \dots f_x}{(\varepsilon - g_1) N_{x-2} - f_1^2 N_{x-3}'} \\ \text{und die Entfernung des Bildes vor der letzten Fläche, gemessen von jenem zu} \\ \text{dieser hin und die Qualität nach §. 3 bestimmt:} \\ \varepsilon' &= g_x - \frac{f_x^2 N_{x-3}}{N_{x-2}} - \frac{(f_1 f_2 f_3 \dots f_x)^2}{N_{x-2} ((\varepsilon - g_1) N_{x-2} - f_1^2 N_{x-3}')} \end{aligned} \right.$$

welche Formeln von $x-1$ an gelten, sobald man noch die Definitionsgleichungen

$$N_{-2} = N_{-2}' = 0, \quad N_{-1} = N_{-1}' = 1 \quad \text{und} \quad N_0 = x_1, \quad N_0' = x_2 \quad \text{berücksichtigt.}$$

Es hält nun auch nicht schwer, auf ganz gleiche Weise, wie es in §. 25 geschah, nachzuweisen, daß bei dem Umwenden eines Linsensystems die Brennpunkte der einzelnen Linsen ihre Lagen beibehalten, nur aber die vordern in die hintern übergehen; ferner, daß sich die Hauptbrennweiten des ganzen Systems solchergestalt ändern, daß die vordere der ersten Lage zur negativen hintern der zweiten Lage wird, und umgekehrt. Die Brenndistanzen des ganzen Systems sind bei der einen Lage verschieden von denen bei der andern und schließhch

bleibt das System in der zweiten Lage ein Fernrohr, wenn es in der ersten eines war, nur sind die Vergrößerungszahlen in beiden Fällen reciproke Werthe zu einander.

§. 32.

Das Auge ist ein optischer Apparat, der aus drei verschiedenen Systemen gebaut ist, nämlich aus dem System der Hornhaut, dem der Krystalllinse und dem der hintern Augenkammer. Obwohl jedes System, namentlich das der Krystalllinse, selbst aus mehreren Flächen zusammengesetzt ist, so kann man doch bei näherungsweise Berechnung der Wirkung den ganzen Apparat aus drei centrirtten Kugelflächen (in Wahrheit weichen die brechenden Flächen von der Kugelgestalt ab) bestehend annehmen. Die vordere Kugelfläche ist die der vordern Hornhaut, sie hat einen positiven Radius $= 7,8$ Mm. Nach der vordern Hornhaut kommt die wässrige Flüssigkeit als ein Medium, das den Brechungsexponent 1,342 und eine Axendicke $= 4$ Mm. hat. Alsdann kommt die Vorderfläche der Krystalllinse mit einem Radius von $+ 10$ Mm. Hinter dieser Fläche liegt das Medium, aus welchem die Krystalllinse besteht, mit einem Brechungsindex $= 1,455$ und einer Dicke $= 4$ Mm.; endlich kommt die hintere Fläche der Krystalllinse mit einem Radius $= -6$ Mm. und hinter dieser Fläche befindet sich die Glasflüssigkeit mit dem Brechungsexponenten 1,342, gegen hinten von der Netzhaut abgegränzt, auf der sich die Gegenstände gleichsam wie auf einer Schirmfläche abbilden.

Dafs diese (nach Listing) angegebenen Werthe Durchschnittswerthe sind, welche von den bei verschiedenen Individuen wirklich vorkommenden mitunter bedeutend abweichen, braucht kaum ausdrücklich bemerkt zu werden.

Nach diesen Daten wollen wir nun die Bestimmungsgrößen des Augenapparates berechnen, um darauf einige Schlüsse über das Sehen selbst zu gründen.

§. 33.

Wir haben:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1; n_2 = 1,342; n_3 = 1,455; n_4 = 1,342 \\ r_1 &= 7,8; r_2 = +10; r_3 = -6; \text{ in Millimeter} \\ d_2 - d_1 &= s_1 = 4; d_3 - d_2 = s_2 = 4 \quad " \quad " \end{aligned}$$

Nach den Formeln für eine Fläche ist: $f = g' = \frac{n' r}{n - n'}$; $f' = g = -\frac{n r}{n - n'}$
und mit Hülfe dieser Formeln erhält man:

$$\begin{aligned} f_1 &= g'_1 = -30,606; f'_1 = g_1 = +22,807 \\ f_2 &= g'_2 = -128,76; f'_2 = g_2 = +118,76 \\ f_3 &= g'_3 = -71,256; f'_3 = g_3 = +77,256. \end{aligned}$$

Ferner bekommt man:

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1 + g'_1 - g_2 = 4 - 30,606 - 118,76 = -145,366 \\ x_2 &= s_2 + g'_2 - g_3 = 4 - 128,76 - 77,256 = -202,016 \\ N_1 &= x_1 x_2 + f_2 f'_2 = +14075. \end{aligned}$$

Defshalb schliesslich für den ganzen Augenapparat:

$$\begin{aligned} f &= \frac{f_1 f_2 f_3}{N_1} = -19,953 \\ f' &= \frac{f'_1 f'_2 f'_3}{N_1} = +14,868 \\ g &= g_1 - \frac{f_1 f'_1}{x_1} + \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2}{x_1 N_1} = +22,807 - 4,802 - 5,217 = +12,788 \end{aligned}$$

$$g' = g'_3 + \frac{x_1 f_3 f'_3}{N_1} = -71,256 + 56,851 = -14,405.$$

Hieraus ist ersichtlich:

Alle die vorderen Brennpunkte liegen vor den betreffenden Flächen und der vordere Brennpunkt des ganzen Apparates liegt 12,788 Mm. vor der vordern Hornhautfläche. Alle die hinteren Brennpunkte liegen hinter ihren respektiven Flächen und der hintere Brennpunkt des ganzen Auges liegt um 14,405 Mm. hinter der hintern Krystalllinsenfläche, also um 22,405 Mm. von der vordern Hornhautfläche entfernt.

Der vordere Hauptpunkt des ganzen Augenapparates liegt um 7,165 Mm. hinter der vordern Hornhautfläche, also um 0,835 Mm. vor der hintern Krystalllinsenfläche.

Der hintere Hauptpunkt liegt um 0,463 Mm. vor der hintern Krystalllinsenfläche, und es liegen demnach beide Hauptpunkte um 0,372 Mm. von einander.

Da wir nun alle Bestimmungsgrößen des Augenapparats besitzen, so können wir auch seine Wirkung in speciellen Fällen ermessen.

Wir wollen vor allem die durch das Auge entworfenen Bilder von Gegenständen, die sich in verschiedenen Entfernungen vor ihm befinden, berechnen. Hierzu dienen uns die Formeln:

$$\epsilon' = g' + \frac{ff'}{\epsilon}, \quad v = -\frac{f'}{\epsilon}, \quad \text{welche nachstehende Resultate geben:}$$

Entfernung des Gegenstandes von der vordern Hornhautfläche in Metern.	Lineare Vergrößerungszahl des entworfenen Bildes.	Hintere Bildbrennweite in Millimetern.	Entfernung des Bildes von der hintern Krystalllinsenfläche
∞	$-\frac{f'}{\epsilon}$	$\frac{ff'}{\epsilon}$	$g' = -14,405$
1000	-0,00002	-0,000297	-14,405297
100	-0,00015	-0,00297	-14,40797
10	-0,00149	-0,0297	-14,4347
1	-0,01506	-0,3005	-14,7055
0,3	-0,05176	-1,0328	-15,4378
0,2	-0,07942	-1,5847	-15,9897
0,1	-0,17048	-3,4016	-17,8066
0,05	-0,39956	-7,9736	-22,3786

§. 34.

Durch blofse Betrachtung dieser kleinen Tabelle kommen wir zu nachstehenden Schlüssen:
Durch den Augenapparat wird ein wirkliches und umgekehrtes Bild hinter seinem hintern Brennpunkt erzeugt.

Der Ort dieses Bildes ist bei sehr weit entfernten Gegenständen bis zur Entfernung von 10 Metern nahezu derselbe, nämlich der hintere Brennpunkt, indem er hiervon nur um $\frac{3}{100}$ Mm. entfernt sein kann. Bei näheren Gegenständen rückt aber das Bild in rasch zunehmendem Verhältnifs weiter nach hinten, so dafs es bei Gegenständen, die 1 Meter entfernt sind, schon um $\frac{3}{10}$ Mm., bei $\frac{1}{10}$ Meter schon um 3,4 Mm. hinter dem letzten Brennpunkt liegt. Wenn sich demnach in diesem Punkt die Netzhaut zur Projicirung des Bildes befindet, so kann sie blos für jene Strahlen, welche von einem mehr als 10 Meter entfernten Punkt kommen, Bildebene sein. Von näher gelegenen Punkten treten die Strahlenkegel aus dem Augenapparat als solche aus, dafs sie von der Netzhaut in Kreisen geschnitten werden, welche man Zerstreuungskreise nennt, und die den Eindruck des undeutlichen Sehens um so stärker machen, je gröfser sie sind. Ein Auge kann somit gleichzeitig nur Punkte deutlich sehen, die eine gewisse, nahezu gleiche Entfernung haben; da es nun aber, wenn auch nicht gleichzeitig, doch in verschiedenen und zwar sehr rasch auf einanderfolgenden Zeiten ganz verschieden entfernte Gegenstände deutlich sehen kann, so mufs es im Stande sein, entweder den Apparat von der Netzhaut zu entfernen oder seine Bestimmungsgröfsen abzuändern, man sagt in dieser Beziehung, das Auge habe das Accommodations- oder Adaptations-Vermögen, dessen Wesen wahrscheinlich blos in letzterem der beiden genannten Umstände beruht, indem durch die Bemühungen der Physiologen neuerer Zeit dargethan ist, dafs beim Sehen von nahen Gegenständen 1) die vordere Linsenfläche mit der Pupille nach vornhin bewegt wird, während die hintere an ihrem Orte bleibt, 2) die vordere und wahrscheinlich auch die hintere Linsenfläche convexer werden und 3) die Pupillenöffnung kleiner wird.

Diesen Veränderungen im Auge sind jedoch Gränzen gesteckt, indem ein normales Auge alle Gegenstände nach und nach deutlich sehen kann, die gröfsere Entfernungen vom Auge haben als 150 Mm. Näher gelegene Gegenstände erscheinen ihm aber undeutlich, man nennt deshalb diese Entfernung $=a$ die kürzeste deutliche Sehweite. Die Gränze der gröfsten Entfernung liegt bei solchen Augen sehr weit, da sehr fernliegende Gegenstände, wie z. B. die meisten Himmelskörper (wenn sie nur hinreichend helle und grofse Bilder liefern, wovon noch später die Rede sein wird) deutlich und scharf abgegränzt gesehen werden. Bei den sogenannten weitsichtigen oder presbyopischen Augen ist die kürzeste deutliche Sehweite gröfser und beträgt 300 bis 400 Mm. oder noch mehr. Bei den kurzsichtigen oder myopischen Augen ist die Gränze der gröfsten deutlichen Sehweite sehr beschränkt, indem letztere oft nur 100 Mm. beträgt; dabei aber wird allerdings auch die kürzeste deutliche Sehweite geringer und fällt oft bis auf 50 Mm.

Was die Gröfse der entworfenen Bilder anlangt, so ist diese in so ferne von Wichtigkeit, als wir darnach die wahre Gröfse der Gegenstände zu beurtheilen gewohnt sind. Die Ver-

gröfserungszahl des Augenbildes, nämlich $v = -\frac{f'}{1 - \frac{g}{\epsilon}}$, wird die scheinbare Gröfse des Gegenstandes genannt. Bei ziemlich weit entfernten Gegenständen, wo im Ausdruck für v die kleine Gröfse $\frac{g}{\epsilon}$ gegen 1 verschwindet, ist die scheinbare Gröfse umgekehrt proportional der Entfernung.

Wenn es mit den Resultaten der neuen physiologischen Forschungen bezüglich der Accommodation seine Richtigkeit hat, woran kaum zu zweifeln ist, so gehen die Gröfsen f , g und g'

des Apparates vom Auge, das in die Ferne sieht, allmählich über in die Gröfsen F , G und G' , wenn es in die Nähe sieht, und wenn man die Entfernung des fernen Gegenstandes mit ε , die des nahen mit a bezeichnet

1) so muß bei einem normalen und weitsichtigen Auge, wo nämlich a die kürzeste deutliche Sehweite bedeutet:

α) damit die Bildweite dieselbe bleibt, die Bedingung erfüllt sein:

$$g' - \frac{nf^2}{n'(\varepsilon - g)} = G' - \frac{nF^2}{n'(a - G)} = g',$$

β) damit die scheinbare Gröfse in umgekehrtem Verhältniß zur Entfernung bleibt, muß sein:

$$\frac{nf}{n'(\varepsilon - g)} : \frac{nF}{n'(a - G)} = a : \varepsilon, \text{ d. h. :}$$

$$f = \frac{aF}{a - G}.$$

2) Ebenso muß bei einem kurzsichtigen Auge, wenn b die grösste, a die kleinste deutliche Sehweite bedeutet, sein:

$$\alpha) g' - \frac{nf^2}{n'(b - g)} = G' - \frac{nF^2}{n'(a - G)} \text{ und}$$

$$\beta) \frac{fb}{b - g} = \frac{Fa}{a - G}.$$

Da man nur zwei Bedingungsgleichungen und doch drei neue Gröfsen F , G und G' hat, so kann der Augenapparat durch Aenderung der Gröfsen f , g und g' noch eine dritte Bedingung erfüllen, die sich wohl auf die Aufhebung der sogenannten Abweichungen, von denen wir hier nicht weiter reden können, beziehen möchte.

Bei dem kurzsichtigen Auge sind die Grenzen, in welchen sich die Veränderungen bewegen, offenbar enger als bei dem normalen. Nach Messungen und darauf gegründeten Schlüssen, von W. Helmholtz gemacht, finden an einem normalen Auge folgende Veränderungen statt:

Die Hornhautfläche bleibt dieselbe bei dem Sehen in die Nähe wie bei dem in die Ferne. Die vordere Krystalllinsenfläche dagegen rückt um 0,4 Mm. weiter nach vorn und vermindert ihren Krümmungsradius um 4 Mm. Die hintere Krystalllinsenfläche bleibt an ihrem Ort und vermindert ihren Krümmungsradius um 0,5 Mm. Hat dabei das fernsehende Auge die Bestimmungsgröfsen nach Listing, wie sie oben angenommen worden sind, so erhält man nachstehende Resultate:

	Hauptbrennweiten der einzelnen Flächen.						Hauptbrennweiten und Brennpunktsdistanzen des ganzen Auges.				Entfernungen und Vergrößerungszahlen der von den einzelnen Flächen entworfenen Bilder.						
	Hornhaut.		Linsenfläche.														
			Vordere		Hintere												
Normales Auge, welches sieht:	f_1	f'_1	f_2	f'_2	f_3	f'_3	f	f'	g	g'	ε	ε'_1	ε'_2	ε'_3	v_1	v_2	v_3
in die Ferne:	— 30,606	+ 22,807	— 128,76	+ 118,76	— 71,256	+ 77,256	— 19,953	+ 14,868	+ 12,788	— 14,405	∞	— 30,606	— 23,565	— 14,4	0	+ 0,817	+ 0,798
in die Nähe:	— 30,606	+ 22,807	— 77,256	+ 71,256	— 65,317	+ 70,817	— 17,931	+ 13,362	+ 11,162	— 12,546	141,7	— 36,478	— 24,386	— 14,4	— 0,192	+ 0,684	+ 0,779

Berechnet man nun mit den Bestimmungsgröfsen, welche für das in die Nähe sehende Auge genommen wurden, die Entfernung a des Gegenstandes vom Auge, welcher sein Bild an

demselben Orte hat, wo das fernsehende Auge die sehr weiten Gegenstände abbildet, indem man die Formel benützt:

$$g' = G' + \frac{FF'}{a-G} \text{ oder } a = G + \frac{FF'}{g'-G'},$$

so erhält man $a = 141,7$, d. h. bis zu dieser Nähe sieht das in der angenommenen Weise geänderte Auge scharf. Die Bildgröfse der entfernten Gegenstände verhält sich zu der in dieser Nähe betrachteten wie

$$\frac{f'}{\varepsilon} : \frac{F'}{a-g} = \frac{f'(a-G)}{F'} \cdot \frac{1}{\varepsilon} = \frac{143}{\varepsilon},$$

also ganz nahe, wie $\frac{a}{\varepsilon}$, wodurch auch unsere oben aufgestellte zweite Bedingung erfüllt ist.

§. 35.

Wenn vor ein Auge ein künstlicher optischer Apparat gestellt wird, so muß das durch beide Apparate entworfene Bild, wenn es klar gesehen werden soll, abgesehen von anderweitigen Umständen, soweit von der hintern Fläche der Krystalllinse entfernt liegen, daß das Auge sich hiezu accomodiren kann. Die durch einen künstlichen optischen Apparat direct mit dem Auge wahrgenommenen Bilder werden bezüglich der von ersterem bewirkten Vergrößerung dadurch beurtheilt, daß man die Vergrößerungszahl des im Auge entworfenen Bildes bei vorgestelltem künstlichen Apparat mit der scheinbaren Gröfse, d. h. mit der Vergrößerungszahl des Augenbildchen ohne den künstlichen Apparat dividirt. Sind dabei die Gegenstände klein und können sie in beliebige Entfernungen vor das Auge gebracht werden, (wie bei den durch die Lupe und den mit dem Mikroskope zu beobachtenden) so wird die scheinbare Gröfse für das freie Auge in der Art berechnet, daß man die Gegenstände in die kürzeste deutliche Sehweite bringt, indem in dieser Entfernung ihre scheinbare Gröfse für's freie Auge ein Maximum ist.

§. 36.

Die künstlichen optischen Apparate, durch welche man direct mit dem Auge sieht, werden gewöhnlich als aus zwei bestehend gedacht, dem vorderen Theilsystem, das also dem Objecte zugewendet ist, Objectiv-System, und dem hinteren, dem Auge nahe liegenden, Ocular-System, genannt. Da hiezu noch der Augenapparat kommt, so haben wir im Ganzen drei Systeme und wir wollen aus Früherem nun die hiezu nöthigen Formeln gebrauchsfertig herstellen und bemerken, daß die mit dem Index 1 versehenen Gröfsen auf das Objectiv-, die mit 2 bezeichneten auf das Ocular- und die mit 3 bezeichneten auf das Augen-System Bezug haben.

Es ist nämlich bei den 3 Systemen in unserm Falle:

$x_1 = s_1 + g'_1 - g_2 =$ Entfernung des hintern Brennpunkts, der zum Objectiv-System, bis zum vordern Brennpunkt, der zum Ocular-System gehört, s_1 selbst aber die Distanz der letzten Fläche des Objectiv-Systems zur ersten Fläche des Ocular-Systems.

$x_2 = s_2 + g'_2 - g_3 =$ Entfernung des hintern Brennpunkts, der zum Objectiv-System gehört, zum vordern Brennpunkt des Auges, während s_2 die Distanz der letzten Ocular-Systemfläche zur vordern Hornhaut bedeutet. Endlich ist noch immer, wie früher auch, $N_1 = x_2 x_1 + f_2 f'_2$. Mit allem diesem ist nach (43), (44) und (45):

$$f = \frac{f_1 f_2 f_3}{N_1}; \quad f' = \frac{f'_1 f'_2 f'_3}{N_1}$$

$$g = g_1 - \frac{f_1 f'_1}{x_1} + \frac{f_1 f'_1 f_2 f'_2}{x_1 N_1}; \quad g' = g'_1 + \frac{x_1 f_3 f'_3}{N_1}$$

$$v = -\frac{f_1 f_2 f_3}{(\varepsilon - g_1) N_1 + f_1 f_1' x_2} \quad \text{und} \quad \varepsilon' = g_3 + \frac{f_3 f_3' x_1}{N_1} + \frac{f_1 f_1' f_2 f_2' f_3 f_3'}{N_1 [(\varepsilon - g_1) N_1 - f_1 f_1' x_2]}.$$

Die durch den Apparat hervorgebrachte Vergrößerung gibt, wenn man sie mit der scheinbaren Grösse des Gegenstandes im bloßen Auge vergleicht, eine Zahl v' , welche wir relative Vergrößerungszahl heissen wollen und es ist:

$$(57.) \quad \dots \quad v' = \frac{f_1 f_2' (\varepsilon + s_1 + s_2 - g_3)}{(\varepsilon - g_1) N_1 + f_1 f_1' x_2}.$$

Nach dem was bereits über den Ort des Bildes im Auge gesagt worden ist, muß die in ε' enthaltene Summe nämlich

$$(58.) \quad \dots \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_3 f_3' x_1}{N_1} + \frac{f_1 f_1' f_2 f_2' f_3 f_3'}{N_1 [(\varepsilon - g_1) N_1 + f_1 f_1' x_2]} \\ \frac{f_3 f_3'}{a - g_3} \end{array} \right. \text{negativ und numerisch kleiner als}$$

sein, wo a die kürzeste deutliche Sehweite bedeutet, wenn ein Auge das Bild, abgesehen von allen andern Umständen, klar sehen soll.

Ist der vor dem Auge stehende Apparat ein Fernrohr, so ist $x_1 = 0$, $N_1 = f_2 f_2'$ also:

$$v' = \frac{f_1 f_2' (\varepsilon + s_1 + s_2 - g_3)}{f_2 f_2' (\varepsilon - g_1)},$$

oder weil die Grössen, welche zu ε addirt sind, ihres verhältnißmässig kleinen Werthes wegen zu vernachlässigen sind

$$(59.) \quad \dots \quad v' = \frac{f_1'}{f_2},$$

woraus hervorgeht, daß die Vergrößerungszahl beim Fernrohr für ein direct durch dasselbe sehendes Auge der reciproke Werth jener Vergrößerungszahl des Bildes ist, welches von dem Fernrohr allein hervorgebracht wird und die wir in (38) $= \frac{f_2}{f_1}$ fanden*).

Bei den Mikroskopen muß g_1 positiv sein und ε wird (bei gehörig großem Werth von s_1) nur um ein Weniges größer als g_1 genommen, folglich hat $\varepsilon - g_1$ einen der Null nahen Werth, deshalb ist für das Mikroskop die relative Vergrößerungszahl:

$$(60.) \quad \dots \quad v' = \frac{f_1 f_2' (s_1 + s_2 + g_1 - g_3)}{f_1 f_1' x_2} = \frac{f_2' (s_1 + s_2 + g_1 - g_3)}{f_1 (s_2 + g_2' - g_3)}.$$

Will man ein Fernrohr als Mikroskop benützen, so hat man daher:

$$v' = \frac{f_2' (s_1 + s_2 + g_1 - g_3)}{f_1 (s_2 + g_2' - g_3)} = \frac{f_2}{f_1} \left(\frac{s_1 + s_2 + g_1 - g_3}{s_2 + g_2' - g_3} \right).$$

Das ist aber nahezu der umgekehrte Werth der Vergrößerungszahl des Fernrohrs selbst, folglich wird das Fernrohr als Mikroskop, weil es dann verkleinert, nicht angewendet werden können, wohl aber ist dieß der Fall, sobald man das Fernrohr umwendet, indem dann f_2 in $-f_1'$, f_1 in $-f_2'$ übergeht, dabei sich zwar auch g_1 und g_2 etwas ändern, was wir durch die Bezeichnung derselben mit großen Buchstaben andeuten; somit hat das umgewendete Fernrohr als Mikroskop nachstehende relative Vergrößerungszahl:

$$(61.) \quad \dots \quad v' = \frac{f_1'}{f_2} \left(\frac{s_1 + s_2 + G_1 - g_3}{s_2 + G_2' - g_3} \right),$$

d. h. beinahe dieselbe, die es als Fernrohr in der ursprünglichen Lage hatte.

*) Wenn an die vorderste und hinterste Fläche ein und dasselbe Medium gränzt.

Die Bedingung zum deutlichen Sehen läßt sich übrigens einfacher, als es in (57) geschah, durch die Gleichung:

$$a \leq \varepsilon' + s \leq b$$

geben, wobei a und b die kleinste und größte deutliche Sehweite, s die Entfernung des Auges und ε' die Entfernung des durch den künstlichen Apparat bewirkten Bildes, jedesmal von seiner hintern Fläche ausgemessen und absolut positiv genommen, vorstellt, so daß statt ε' nach (45) auch $g' + \frac{ff'}{\varepsilon - g}$ geschrieben werden kann. Für Gegenstände nun, welche mit dem Mikroskop betrachtet werden sollen, muß $\varepsilon' + s = a$ sein, und da man in dieselbe Entfernung a vom Auge diese Gegenstände auch dann hält, wenn man sie mit unbewaffnetem Auge betrachtet, so ist die relative Vergrößerungszahl hier offenbar der durch den Apparat hervorgebrachten Vergrößerungszahl selbst gleich. Aus diesem Grunde hat man für Lupen und Mikroskope:

$$\varepsilon' + s = g' + \frac{ff'}{\varepsilon - g} + s = a \text{ und hieraus: } \varepsilon - g = \frac{ff'}{a - s - g'} \dots \dots \dots (62.)$$

$$\text{Ferner: } v' = v = -\frac{f'}{\varepsilon - g} = -\frac{a - s - g'}{f} \dots \dots \dots (63.)$$

Für das Stöpselperspektiv ist nach (59), wenn es als Fernrohr gebraucht wird:

$$v' = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\varrho}{\varrho'} \dots \dots \dots (64.)$$

Würde es umgewendet, so ist $v' = \frac{\varrho'}{\varrho}$. Wird es als Lupe benützt, so ist nach (63):

$$v' = \frac{(a - s - g')x - f_2 f_2'}{f_1 f_2}$$

oder, weil $x = 0$ ist, $= \frac{\varrho'}{\varrho}$, wird es umgewendet als Lupe benützt, so ist $v' = \frac{\varrho}{\varrho'}$,

also hat das umgewendete Stöpselperspektiv als Lupe beinahe dieselbe relative Vergrößerung, die es in ursprünglicher Lage als Fernrohr hat, entsprechend dem Verhalten, das oben überhaupt für Fernrohre nachgewiesen wurde. Auch darin stimmt das Stöpselperspektiv mit dem was oben für das Fernrohr überhaupt gefunden wurde, daß es nämlich in ursprünglicher Lage, als Mikroskop benützt, verkleinert. Das Fernrohr hat somit das merkwürdige Verhalten:

In demselben Maasse, als es, als Fernrohr benützt, vergrößert, verkleinert es als Mikroskop; in umgewendeter Lage vergrößert es eben so vielmal, wenn es als Mikroskop benützt wird, wie vorhin bei der Fernrohrwirkung, verkleinert dagegen in demselben Maasse, wenn man es so als Fernrohr gebraucht.

VII.

Von den Veränderungen, welche die optische Kraft eines Strahlenkegels erleidet, wenn dieser durch einen Apparat geht. Von der Helligkeit, den Helligkeitszonen und von dem Gesichtsfeld eines einfachen oder zusammengesetzten optischen Systems.

§. 37.

Die Betrachtung der Wirkung eines optischen Apparates ist schliesslich immer auf die eines von ihm erzeugten wirklichen Bildes gerichtet, sei es nun, daß sich dieses objectiv auf einem Schirm darstellt, oder daß es unmittelbar von der Netzhaut eines durch den Apparat

sehenden Auges aufgefangen wird, wie es sich in ersterem Falle bei den Sonnenmikroskopen, Daguerrotyp-Tuben etc., in letzterem bei den Brillen, Lupen, zusammengesetzten Mikroskopen und Fernröhren ereignet.

Die optische Kraft eines Lichtstrahls ist von der dem Lichtpunkt eigenthümlichen Leuchtkraft abhängig, welche man gewöhnlich kurz unter dem Ausdruck Intensität versteht und mit i bezeichnet; sie kann für alle Strahlen desselben Punktes, wenigstens bei unsern Betrachtungen, als dieselbe angenommen werden. Bei dem Durchgang eines Strahles durch einen durchsichtigen Körper mindert sie sich allmählich; von einem Medium zu einem andern plötzlich und letztere Aenderung geschieht in weit stärkerem Grade als erstere. Die Intensität eines Strahls, der durch mehrere brechende Flächen gegangen ist, ist somit in dem Bildpunkt weit geringer, als im Gegenstandspunkt. Am Ende des ersten Mediums ist sie z. B. $\alpha_1 i$, beim Uebergang über die erste Gränze $\alpha_1 \beta_1 i$ und am Ende des zweiten Mittels $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 i$, wo α_1 , α_2 und β_1 ächte Brüche bedeuten, von welchen die ersteren der Einheit nahezu gleich sind, der letztere dagegen einen weit kleineren Werth besitzt. In ähnlicher Weise ist zu schliessen, daß die Intensität eines Lichtstrahls, der durch ein System vom μ brechenden Flächen gegangen ist, den Werth $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu+1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_{\mu} i = \alpha \beta i$ besitzt, wo $\beta < \alpha < 1$ ist.

§. 38.

Je mehr Strahlen in einem Bildpunkte zusammenkommen, desto größer ist auch die dem letztern angehörige optische Kraft; bezeichnen wir diese Menge mit q , so ist die optische Kraft des Bildpunktes q mal größer, für q Strahlen, als wie wenn ein Strahl in ihm zusammenkommt und wir haben daher für die optische Kraft eines solchen Bildpunktes den Ausdruck $\alpha \beta q i$.

Um aber überhaupt ein Maass für die Menge der Strahlen in zwei Lichtkegeln zu erhalten, stellen wir folgende drei Sätze auf:

- a) Die Strahlenmengen in zwei Kegeln, die gleiche Höhen haben und deren Basen in derselben Ebene liegen, verhalten sich wie diese Basen; denn hier verhalten sich die Mengen der Strahlen, wie die Inhalte der Kegel, letztere aber stehen mit den Basen in gleichem Verhältniß, folglich auch erstere.
- b) Die Strahlenmengen in zwei Kegeln, deren Basen in zwei verschiedenen parallelen Ebenen liegen, sind gleich, wenn sich die Basen wie die Quadrate der Entfernungen von den Spitzen verhalten.

Denkt man sich nämlich bei dem Kegel, welcher seine Basis näher an der Spitze hat, die Grundfläche, ohne ihren Inhalt zu verändern, von derselben Form, wie sie die Basis des andern Kegels hat, so ist nach dem ersten Satz nichts an der Strahlenmenge des ersten Kegels geändert. Nun ist der so abgeänderte Kegel dem zweiten Strahlenkegel ähnlich und es können beide mit ihrem Körperwinkel an der Spitze auf einander gelegt werden, so daß sie sich decken, wodurch aber die gleiche Menge der in ihnen enthaltenen Strahlen erwiesen ist.

- c) Hat man zwei Strahlenkegel, deren Basen b_1 und b_2 auf parallelen Ebenen liegen und deren Höhen h_1 und h_2 sind, so haben die in ihnen enthaltenen Strahlenmengen das Verhältniß $\frac{b_1}{h_1^2} : \frac{b_2}{h_2^2}$. Denn denkt man sich einen dritten Strahlenkegel, der dieselbe

Höhe h_2 wie der zweite hat, aber die Basis $\frac{b_1 h_2^2}{h_1^2}$, so hat dieser die nämliche Strahlenmenge, wie der erste Kegel nach dem vorgehenden Satz. Nach dem ersten Satz verhält sich aber diese Strahlenmenge des dritten Kegels, somit auch die des ersten, zu der des zweiten, wie

$$\frac{b_1 h_2^2}{h_1^2} : b_2 = \frac{b_1}{h_1^2} : \frac{b_2}{h_2^2}.$$

Haben nun zwei Lichtkegel kreisförmige Grundflächen in parallelen Ebenen und ist die Höhe des einen $=1$, die des andern $=\varepsilon$, der Radius der Kreisbasis des einen $=1$, der Radius der Grundfläche des andern $=o$, und ist endlich die Strahlenmenge des einen Kegels $=1$, so ist die des andern:

$$q = \frac{o^2}{\varepsilon^2}.$$

Hat ein Strahlenkegel, der auf die vordere Fläche eines optischen Apparates fällt, für seine Basis als Radius den Oeffnungshalbmesser o dieser Fläche, so ist die ihm zukommende Strahlenmenge $=\frac{o^2}{\varepsilon^2}$. Durch die erste Fläche geht diese Menge ganz durch, ob aber auch durch die zweite und dritte etc., läßt sich von vornherein nicht sagen und bedarf einer genauen Ueberlegung, die wir später machen werden.

Nehmen wir nun an, es sei die aus dem Apparat tretende Strahlenmenge nicht mehr gleich der eintretenden $=\frac{o^2}{\varepsilon^2}$, sondern jetzt $=\vartheta \frac{o^2}{\varepsilon^2}$, wo $\vartheta < 1$, so ist die Lichtstärke des Bildpunktes $=\frac{\alpha \beta \vartheta o^2 i}{\varepsilon^2}$.

§. 39.

Was endlich die einer Bildfläche angehörige optische Kraft anlangt, welche doch schließlich allein zur Wahrnehmung und Beurtheilung gelangt, so ist dieselbe offenbar $=$ der Summe der optischen Kräfte sämtlicher Lichtpunkte also

$$= \frac{\alpha \beta o^2}{\varepsilon^2} (\vartheta_1 i_1 + \vartheta_2 i_2 + \vartheta_3 i_3 + \dots + \vartheta_\lambda i_\lambda).$$

Wenn die Intensität der verschiedenen Gegenstandspunkte einer gewissen Fläche dieselbe ist, wenn ferner der Verlust an Strahlen beim Durchgang für jeden Punkt dieser Fläche der gleiche ist, so ist die optische Kraft der entsprechenden Bildfläche:

$$= \frac{\alpha \beta \vartheta i o^2 \lambda}{\varepsilon^2}.$$

wo λ den Inhalt der Gegenstandsebene repräsentirt.

Die λ Bildpunkte sind aber über eine v^2 mal grössere Fläche als wie die Gegenstandspunkte ausgebreitet; unter sonst gleichen Umständen machen sie dann auch eine ebenso vielmal geringere optische Wirkung auf die Flächeneinheit; berücksichtigt man nun dieses, so ist endlich die optische Kraft des Bildes, das durch den Apparat erzeugt wird, oder, wie man auch sagt die Helligkeit des bewirkten Bildes:

$$h = \frac{\alpha \beta o^2}{\varepsilon^2 v^2 \lambda} \cdot (\vartheta_1 i_1 + \vartheta_2 i_2 + \dots + \vartheta_\lambda i_\lambda), \dots \dots \dots (65.)$$

oder für den Fall, als die in Betracht kommende Gegenstandsfläche Punkte von gleicher Intensität besitzt und der Verlust an Strahlen beim Durchgang derselbe ist:

$$h = \frac{\alpha \beta \vartheta i o^2}{\varepsilon^2 v^2} \dots \dots \dots (66.)$$

§. 40.

Für Bilder, die durch einen einzigen Apparat gegenständlich dargestellt werden, ist die Betrachtung ihrer Lichtstärke, wenn nur noch das ϑ richtig bestimmt ist, so weit fertig.

Ist der optische Apparat das unbewaffnete Auge, auf dessen Netzhaut das Bild projicirt und empfunden wird und haben die Punkte der Gegenstandsebene gleiche Intensität, so ist:

$$h = \frac{\alpha_1 \beta_1 \vartheta_1 i o_1^2}{\varepsilon^2 v_1^2}$$

und hier sind die Gröfsen $\alpha_1 \beta_1 \vartheta_1 o_1$ und v_1 von der individuellen Beschaffenheit des Auges abhängig. Für v_1 kann man auch nach §. 32 den Werth $-\frac{f'}{\varepsilon - g}$ setzen, wo f' die hintere Hauptbrennweite und g die vordere Brennpunktdistanz des Auges bezeichnet.

Es ist demnach h für Gegenstände, die das Auge sieht

in gröfserer Ferne:

in nächster Nähe:

$$h_1 = \frac{\alpha_1 \beta_1 \vartheta_1 o_1^2 i}{f'^2}$$

$$H_1 = \frac{A_1 \beta_1 \Theta i o_1^2 (a - G)^2}{a'^2 F^2}$$

oder weil nach §. 34 für ein normales Auge:

$$\frac{a F'}{a - G} = f', \text{ ist } H_1 \text{ auch } = \frac{A_1 \beta_1 \Theta i o_1^2}{f'^2},$$

wo unter den Buchstaben des grofsen Alphabets jenen, mit dem kleinen Alphabet bezeichneten, analoge Gröfsen verstanden werden, jedoch so abgeändert, wie es für F' und G schon in §. 34 besprochen wurde. A_1 ändert sich etwas, weil die Luftschichten, welche im zweiten Falle die Lichtstrahlen zu durchdringen haben, dünner und die Krystalllinse dicker werden, ϑ_1 geht in Θ_1 über, weil sich die Pupille verändert. Für ferne Gegenstände sehen wir das h_1 ganz unabhängig von ε , also bleibt die vom Auge wahrgenommene Helligkeit dieselbe, an welchem Orte sich auch ein Gegenstand befindet, was der Erfahrung entspricht, soll dieses sich auch für nahe Gegenstände ereignen, wie dieses gleichfalls erfahrungsgemäfs ist, so ist:

$$A_1 \Theta_1 = \alpha_1 \vartheta_1,$$

welche Bedingung zu den zweien bereits in §. 34 entwickelten als dritte hinzutritt für die Veränderung, die ein nahe sehendes Auge dann erleiden mufs, wenn es in die Ferne sieht.

§. 41.

Bei Bildern, die durch einen optischen Apparat erzeugt und unmittelbar von einem hinter ihm stehenden Auge aufgenommen werden, kommen noch einige Momente in Betracht. In diesem Falle, wo das Bild mindestens durch zwei verschiedene optische Apparate, durch den des Auges und den künstlichen, bewirkt wird, vergleicht man nämlich gern die optische Kraft des Bildes, das von einer gegenständlichen Fläche unter denselben sonstigen Umständen im freien Auge erzeugt wird, mit der optischen Kraft von jenem Bilde, welches sich dem bewaffneten Auge darbietet. Hiezu bedarf es aber nur der Annahme eines aus dem vor dem Auge stehenden Apparat und dem Augenapparat selbst zusammengesetzten Systems.

Für die Helligkeit des durch das zusammengesetzte System bewirkten Bildes hat man alsdann bei der Annahme einer über die Gegenstandsfläche gleich verbreiteten Intensität:

$$h_2 = \frac{\alpha_2 \beta_2 \vartheta_2 o_2^2 i}{\varepsilon^2 v_2^2}$$

und für die Helligkeit des mit freiem Auge wahrgenommenen Bildes, wenn s die Entfernung des Objectives vom Auge bedeutet:

$$h_1 = \frac{\alpha_1 \beta_1 \vartheta_1 o_1^2 i}{s^2 v_1^2}$$

das Verhältnifs, welches man die relative Helligkeit nennen kann, ist sonach:

$$(67.) \quad h' = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\alpha_2 \beta_2 \vartheta_2 o_2^2 s^2 v_1^2}{\alpha_1 \beta_1 \vartheta_1 o_1^2 \varepsilon^2 v_2^2}$$

Es steht also die relative Helligkeit im umgekehrten Verhältniss mit der Vergrößerung und im direkten mit der Grösse $\frac{\alpha_2 \beta_2 \vartheta_2 o_2^2}{\alpha_1 \beta_1 \vartheta_1 o_1^2} \cdot \frac{s^2}{\varepsilon^2}$.

§. 42.

Die brechenden Kugelflächen sind bekanntlich nur Flächen von Kugelsegmenten, deren Basis-halbmesser hier Oeffnungshalbmesser heissen und die aus anderweitigen Gründen nicht gröfser als ein Dritttheil der Kugelradien sein dürfen. Durch diese Beschränkung aber müssen die auffallenden Lichtkegel unter Umständen Verlust an Strahlen erleiden und um nähern Aufschluss hierüber zu erhalten, machen wir nachstehende Betrachtung:

Denken wir uns zunächst zwei auf einanderfolgende Kugelflächen, nämlich die $x-1^{\text{te}}$ und die um δ_{x-1} hinter ihr stehende x^{te} und construiren, wie früher, an jede Fläche in dem Axenpunkt die tangirende Ebene. Nun gehe von einem Punkt P_{x-1} , der um ε_{x-1} vor der $(x-1)^{\text{ten}}$ Tangentialebene und um z_{x-1} von der optischen Axe entfernt liegt, ein Strahlenkegel auf letztere Ebene und habe darin einen Kreis zur Basis, der sein Centrum von der optischen Axe um m_{x-1} entfernt und einen Halbmesser $= \omega_{x-1}$ hat.

Bei dem Durchgang durch die $(x-1)^{\text{te}}$ Fläche wird dieser Strahlenkegel so von seinem Wege abgelenkt, dafs ihm ein anderer entspricht, der seine Spitze im Bildpunkte von P_{x-1} , nämlich in P_x hat, wo P_x von der optischen Axe um z_x , von der x^{ten} Tangentialebene um ε_x entfernt ist. Die Basis des abgelenkten Kegels ist ein Kreis in letzter Ebene, welcher den Radius ω_x und einen um m_x von der optischen Axe weg liegenden Mittelpunkt hat. Dabei ist aus Früherem und mit der am gehörigen Orte angegebenen Bedeutung von ε_{x-1} und v_{x-1} :

$$z_x = v_{x-1} z_{x-1}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon'_{x-1} + \delta_{x-1}$$

und aus sehr einfachen geometrischen Erwägungen:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{\omega_{x-1} (\varepsilon'_{x-1} + \delta_{x-1})}{\varepsilon'_{x-1}} = \omega_{x-1} \left(1 + \frac{\delta_{x-1}}{\varepsilon'_{x-1}}\right) \\ m_x &= m_{x-1} \left(1 + \frac{\delta_{x-1}}{\varepsilon'_{x-1}}\right) - v_{x-1} z_{x-1} \frac{\delta_{x-1}}{\varepsilon'_{x-1}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (68.)$$

Die Oeffnungskreise der einzelnen Flächen haben ihre Centra in der optischen Axe und man kann sie zumal bei Centralstrahlen, der gröfsern Einfachheit in der Betrachtung wegen, auf den respektiven Tangentialebenen liegend annehmen, und ihnen hier die Halbmesser

$$o_x, o_{x+1} \dots \dots \text{zutheilen.}$$

Nun ist aber gewifs, dafs ein Strahlenkegel nur dann vollständig die x^{te} Fläche durchdringen kann, wenn seine Basis im entsprechenden Oeffnungskreis enthalten ist; unvollständig, wenn seine Basis nur theilweise im Oeffnungskreis enthalten ist, und er kann gar nicht passiren, sobald seine Basis ausserhalb des Oeffnungskreises der nämlichen Tangentialebene liegt.

Ist aber ein Strahlenkegel unvollständig durch eine Fläche gegangen, so besitzt er nur noch einen Theil seiner Strahlen, der zu der Anzahl der in ihm enthaltenen das Verhältniss ϑ hat, wo ϑ , nach dem ersten der in §. 38 über die Strahlenmenge stehenden Sätze, dem Quotienten aus dem Stücke, welches die Basis des Strahlenkegels und der Oeffnungskreis gemeinschaftlich haben, dividirt durch die Basis des Strahlenkegels selbst gleichkommt. Hat ein Strahlenkegel einmal einen solchen Verlust erlitten, so kann sich derselbe im weitem Fortgang natürlich

nur vermehren, nicht aber vermindern und man ist deshalb genöthigt die Betrachtungen des Lichtverlustes an allen einzelnen Flächen zu machen. Hat ein Lichtkegel bis zur x^{ten} Fläche noch alle seine Strahlen, so finden hier folgende Fälle statt, wenn dabei die Gröfsen m_x und ω_x bloß absolut genommen werden:

$$(69.) \dots \left\{ \begin{array}{l} o_x \geq m_x + \omega_x, \text{ dann geht er vollständig durch die } x^{\text{te}} \text{ Fläche.} \\ o_x \leq \omega_x - m_x, \text{ dann geht er nur theilweise durch die } x^{\text{te}} \text{ Fläche, füllt aber ihren} \\ \text{ganzen Oeffnungskreis, dabei ist } \vartheta = \left(\frac{o_x}{\omega_x}\right)^2. \\ o_x < m_x + \omega_x, \text{ dann geht er nur theilweise durch die } x^{\text{te}} \text{ Fläche.} \\ o_x \leq m_x - \omega_x, \text{ dann geht kein Strahl mehr durch die Fläche.} \end{array} \right.$$

§. 43.

Als Beispiel zur Anwendung der im vorigen §. entwickelten Formeln diene uns wieder der Apparat eines in die Ferne und eines in die Nähe sehenden Auges.

Für das fernsehende Auge:

Für das nahesehende Auge:

Der Oeffnungshalbmesser der Hornhaut $o_1 = 5,7$

$O_1 = 5,7$

" " " Pupille $o_2 = 1,9$

$O_2 = 1,2$

" " " der hintern Linsenfläche $o_3 = 4$

$O_3 = 3,9$

Wir haben also für $o_1 = \omega_1 = 5,7$ $m_1 = 0$

beim fernsehenden:

beim nahesehenden:

$$\omega_2 = 5,7 \left(1 - \frac{4}{30,606}\right) = 4,949$$

$$\omega_2 = 5,7 \left(1 - \frac{3}{36,48}\right) = 5,23$$

$$\vartheta_1 = \left(\frac{1,9}{4,949}\right)^2 = 0,147$$

$$\vartheta_1 = \left(\frac{1,2}{5,239}\right)^2 = 0,053.$$

Der Verlust bei der zweiten Fläche ist beim fernsehenden Auge so groß, daß nur 0,147 oder beinahe 15 % der auf die Hornhaut fallenden Strahlen und beim nahesehenden nur 0,053 oder 5 1/3 % durchkommen. Da ferner die Basen der Strahlenkegel an der dritten Fläche noch kleiner werden, als die Pupillenöffnung, die Oeffnung der dritten Fläche selbst aber viel größer ist, als jene, so kommt im Innern des Auges kein weiterer Verlust mehr vor.

Es ist auch leicht zu berechnen, wie groß die Basis eines Strahlenkegels, die in der Ebene, welche die Hornhautfläche berührt, liegt, höchstens sein darf, damit er keinen Verlust erleidet. Es kann nämlich der Radius dieser Basis, wenn ihr Centrum in der optischen Axe liegt, höchstens sein:

beim fernsehenden Auge:

beim nahesehenden Auge:

$$y = \frac{1,9 \cdot 30,606}{26,606} = 2,19 \text{ Mm.} = 0,0097 \text{ paris. L.}$$

$$y = \frac{1,2 \cdot 36,48}{33,48} = 1,31 \text{ Mm.} = 0,0059.$$

Man kann für solche Strahlenkegel auch den Verlust der in das Auge eintretenden Strahlen unbeachtet lassen, indem man $\vartheta = 1$ setzt, wenn man für den Oeffnungshalbmesser des Auges den Werth y nimmt. Denn ein Strahlenkegel, dessen Axe nach der Mitte des Auges gerichtet ist, und dessen Basis diesen Halbmesser, den wir den wirksamen Oeffnungshalbmesser des Auges nennen, besitzt, tritt vollständig durch den Augenapparat; alle Strahlen dagegen, die außerhalb der genannten Basis das Auge treffen, gehen nicht mehr durch. Wir haben deshalb auch für Gleichung (66) folgende:

$$(70.) \dots \dots \dots h' = \frac{h_2}{h_1} = \frac{\alpha_2 \beta_2 \vartheta_2 o^2}{\alpha_1 \beta_1 y^2} \cdot \frac{s^2}{(\epsilon)^2 (v')^2},$$

wo o den Radius der Oeffnung der vordersten Fläche des Apparates, y den wirksamen Oeffnungshalbmesser des Auges und v' die relative Vergrößerungszahl bedeutet.

§. 44.

Wenn man die in §. 42 gemachten Betrachtungen an jeder einzelnen Fläche wiederholt und die bereits für die vordere Fläche gefundenen Resultate bei der Untersuchung an einer folgenden benützt, so läßt sich der hier in Betracht kommende Hergang, für den Fall als der Lichtkegel eine Reihe auf einander folgende brechende Flächen durchdringt, unschwer erkennen. Indessen ist es nicht minder leicht, die Sache etwas allgemeiner aufzufassen, um dadurch independente und brauchbarere Formeln zur Beurtheilung des Durchgangs eines Strahlenkegels durch eine beliebige Fläche des Systems zu erlangen. Denkt man sich nämlich mehrere centrisch mit einander verbundene Systeme, wobei das einzelne System wohl auch nur eine einzige Fläche sein kann, und einen Licht gebenden Punkt P , ferner sei die zu diesem Punkt gehörige optische Ebene construiert, welche mit den verschiedenen Oeffnungskreisen die Punkte $O_1 O_2 \dots O_x \dots$ gemein hat. Es schicke ferner der angenommene Lichtpunkt einen Strahlenkegel auf den Apparat, dessen Spitze in P selbst und dessen Basis ein Kreis in der Berührungsebene zur vordern Fläche ist, welcher im Axenpunkt sein Centrum und als Radius den Oeffnungshalbmesser o der ersten Fläche hat. Von allen den Strahlen des Lichtkegels heben wir PD_1 heraus, der die Axe des Kegels repräsentirt und durch die Mitte D_1 des Oeffnungskreises der ersten Fläche geht, ebenso noch PO_1 den äußersten Strahl in der optischen Ebene, der nach dem Punkt O_1 gerichtet ist, weil wir alsdann, wenn wir die Lage dieser beiden Strahlen nach der Brechung durch beliebig viele etwa x Flächen des Apparates bestimmen, auch die Lage des gebrochenen Kegels selbst, namentlich aber den Ort des Centrums und die Größe des Radius von seiner auf der Berührungsebene (zur beliebig angenommenen x^{ten} Fläche) liegenden Basis kennen, um hienach zu ermessen, welcher von den in §. 42 angegebenen Bedingungen (69) der Strahlenkegel bei dem Durchgang durch die x^{te} Fläche Genüge leistet. Zur Fixirung der Lage der beiden genannten Strahlen bedarf es aber nun nichts weiter, als die Bestimmung der Orte von den in der optischen Ebene liegenden Bildern der Punkte P , D_1 und O_1 .

Der Punkt P hat von der ersten Berührungsebene den Abstand ε und von der optischen Axe den Abstand z ; sein Bildpunkt hat deshalb von der x^{ten} Berührungsebene den Abstand:

$$\varepsilon' = g' - f v = g' + \frac{f f'}{\varepsilon - g},$$

und von der optischen Axe den Abstand $v z$, wo der Werth

$$v = -\frac{f'}{\varepsilon - g}$$

ist und sich die in den angezogenen Formeln stehenden f und g auf das System beziehen, welches alle Flächen mit der x^{ten} als letzte bilden. Der Punkt D_1 liegt im Axenpunkt der ersten Fläche, sein Bildpunkt hat somit die Entfernung

$$\varepsilon_0 = g' - \frac{f f'}{g}$$

von der x^{ten} Berührungsebene und endlich der Punkt O_1 liegt in der ersten Berührungsebene und um o von der optischen Axe weg; sein Bildpunkt hat deshalb von der x^{ten} Tangentialebene ebenfalls die Entfernung ε'_0 , von der optischen Axe dagegen den Abstand $v_0 o$, wobei $v_0 = \frac{f'}{g}$ ist.

Nimmt man jetzt in der optischen Ebene die optische Axe als Axe der x und eine darauf senkrechte Gerade als Axe der z , endlich den Axenpunkt der letzten Fläche als Nullpunkt eines Coordinatensystems an, so haben die drei genannten Bildpunkte nachstehende Coordinaten:

Der Bildpunkt von P hat die Coordinaten $x_1 = \varepsilon' \quad z_1 = v z$.

" " " D_1 " " " $x_2 = \varepsilon_0' \quad z_2 = 0$.

" " " O_1 " " " $x_3 = \varepsilon_0' \quad z_3 = v_0 o$.

Die Gerade, welche durch die beiden ersten Bildpunkte geht, hat deshalb die Gleichung:

$$z = v z + \frac{v z}{\varepsilon' - \varepsilon_0'} (x - \varepsilon')$$

und schneidet die Tangentialebene der x^{ten} Fläche in einem Punkt, den wir mit M bezeichnen und der das Centrum für die Basisfläche des gebrochenen Strahlenkegels in genannter Ebene ist.

Die Entfernung dieses Centrums von der optischen Axe ist daher:

$$(70.) \quad m' = -\frac{v \varepsilon_0'}{\varepsilon' - \varepsilon_0'} z = \frac{g \varepsilon_0'}{f} \cdot \frac{z}{\varepsilon}.$$

Die Gerade dagegen, welche durch den ersten und dritten Bildpunkt geht, schneidet die x^{te} Berührungsebene in einem Punkt Q , welcher zur optischen Axe die Entfernung

$$\frac{v_0 o \varepsilon' - v z \varepsilon_0'}{\varepsilon' - \varepsilon_0'}$$

hat, der Unterschied der beiden gefundenen Entfernungen ist der Radius der mehrgenannten Basisfläche, welchen wir mit ω' bezeichnen und man hat sonach:

$$(71.) \quad \omega' = \frac{v_0 o \varepsilon'}{\varepsilon' - \varepsilon_0'} = \left(\frac{g'}{f} - \frac{g \varepsilon_0'}{f \varepsilon} \right) o.$$

Setzt man diese Werthe für ω' und m' in die Bedingungsgleichungen (69), so ergeben sich folgende neue, wenn man den Oeffnungshalbmesser der Berührungsebene für die letzte Fläche $= o'$ setzt:

Weil nämlich: $m' \pm \omega' = \frac{g \varepsilon_0'}{f} \cdot \frac{z}{\varepsilon} \pm \left(\frac{g'}{f} - \frac{g \varepsilon_0'}{f \varepsilon} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \right) o$, so ist:

$$(72.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{z}{\varepsilon} \leq \left(\frac{f o'}{g \varepsilon_0'} \right) - \left(\frac{g'}{g \varepsilon_0'} - \frac{1}{\varepsilon} \right) o \quad \text{für den vollständigen Durchgang der Strahlen, die auf} \\ \quad \text{die letzte Tangirungsebene fallen,} \\ \text{und ebenso:} \\ \frac{z}{\varepsilon} \leq - \left\{ \left(\frac{f o'}{g \varepsilon_0'} \right) - \left(\frac{g'}{g \varepsilon_0'} - \frac{1}{\varepsilon} \right) o \right\} \quad \text{für den unvollständigen Durchgang, aber so, daß} \\ \quad \text{die ganze Oeffnung der letzten Tangirungsebene} \\ \quad \text{ausgefüllt wird, hier ist } \vartheta = \left(\frac{o}{\omega} \right)^2, \\ \frac{z}{\varepsilon} > \left(\frac{f o'}{g \varepsilon_0'} \right) - \left(\frac{g'}{g \varepsilon_0'} - \frac{1}{\varepsilon} \right) o \quad \text{für den unvollständigen Durchgang und dabei wird die} \\ \quad \text{letzte Oeffnung nicht ausgefüllt,} \\ \frac{z}{\varepsilon} > \left(\frac{f o'}{g \varepsilon_0'} \right) + \left(\frac{g'}{g \varepsilon_0'} - \frac{1}{\varepsilon} \right) o \quad \text{für den Fall, daß keiner der auf die letzte Tangirungs-} \\ \quad \text{ebene fallenden Strahlen durch die Oeffnung geht.} \end{array} \right.$$

Dabei ist aber wohl zu bemerken, daß die in Klammer stehenden zwei Ausdrücke der rechten Seiten jeder für sich absolut positiv zu nehmen ist, und bei den ersten zweien das Resultat der rechten Seite positiv sein muß, also nur entweder die eine oder die andere Bedingung erfüllt sein kann, bei der letzten aber bloß der numerische Werth des ganzen Ausdrucks rechts zu nehmen ist. Ferner ist für das System, wovon die x^{te} Fläche die letzte ist, wenn es Fernrohrwirkung hat, aus schon öfters angeführter Ursache nach (38)

$$\varepsilon_0' = g_2' - g_1 \frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'}, \quad \frac{f}{g} = -\frac{f_2}{f_1} \quad \text{und} \quad \frac{g'}{g} = -\frac{f_2 f_2'}{f_1 f_1'},$$

wobei f_1 , f'_1 und g_1 auf das Objectiv-; dagegen f_2 , f'_2 und g_2 auf das Ocular-System Bezug haben; auch ist hier $\frac{1}{\varepsilon} = 0$ zu nehmen. Außerdem wollen wir nicht unerwähnt lassen, daß wenn der Ausdruck $(\frac{f'o'}{g\varepsilon_0}) - (\frac{g'}{g\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon})o$ der Null gleich ist, auch $\frac{z}{\varepsilon} = 0$ ist und der Ausdruck der rechten Seite in der letzten Bedingung übergeht in $2(\frac{f'o'}{g\varepsilon_0})$.

§. 45.

Der Ausdruck $\frac{z}{\varepsilon}$ ist geometrisch genommen die Tangente des Winkels ψ , welchen der Strahl PD_1 mit der optischen Axe macht und ist dieser Winkel, wie es für Centralstrahlen nicht anders sein kann, ziemlich klein, so kann man, was auch gewöhnlich geschieht, $\frac{z}{\varepsilon} = \psi$ setzen. Ferner ist ersichtlich, daß verschiedene Werthe von z , also auch von ψ unter sonst gleichen Umständen verschiedene Bedingungen erfüllen können; während z. B. ein kleines z der ersten oder zweiten Bedingung genügt, kann ein größeres die dritte, ein noch größeres die vierte erfüllen. Hieraus erhellt aber ganz einfach, daß die Bilder ein und derselben Gegenstandsebene bei constanter Beschaffenheit des Apparates verschiedene Helligkeit besitzen.

In der optischen Axe und in einem Kreis, dessen Radius der Null gleich sein kann, wenn der am Schlusse des vorigen §. erwähnte Fall eintritt, liegen die Punkte derjenigen Bilder, welche der ersten oder zweiten Bedingung Genüge leisten, somit die größtmögliche Helligkeit besitzen, da für sie das ϑ sich entweder als 1, wenn die erste, oder als ϑ_1 , wenn die zweite Bedingung erfüllt wird, darstellt, wo ϑ_1 eine der Einheit nahe Zahl bedeutet, die für alle Punkte, welche in dem mit dem größten $z = z_1$, das dieser Bedingung entspricht, beschriebenen Kreise liegen, denselben Werth hat. Hier hat ϑ_1 den größten Werth, der möglicherweise vorkommen kann, und aus diesem Grunde heisst der beschriebene Kreis, dessen Bild den Halbmesser νz_1 hat, die Zone der gleichen und größten Helligkeit.

Wird z größer gemacht $= z_1 + \Delta z$, so wird ϑ kleiner, weil jetzt die dritte Bedingung erfüllt wird und man erhält für jeden folgenden damit construirten Kreis schwächer beleuchtete Bildpunkte, bis sich endlich für $z_1 = z_2$ die vierte Bedingung realisirt. In diesem Kreis und allen weiter ist $\vartheta = 0$, also erscheinen hier gar keine entsprechenden Bildpunkte mehr. Die Zone im Bilde, die zwischen den Kreisen liegt, welche in der Gegenstandsebene mit z_1 und z_2 beschrieben sind, heisst man die Zone der ungleichen und successiv abnehmenden Helligkeit. Im Bilde haben diese Kreise beziehungsweise die Radien νz_1 und νz_2 . Den Winkel ψ nennt man den scheinbaren Halbmesser der zu ihm gehörigen Zone, während νz der im Bilde vorkommende wirkliche ist.

Ist z_1 der Radius der gleichen und größten Helligkeitszone und z_2 der Halbmesser des letzten überhaupt sichtbaren Kreises, so ist $z_1 + \frac{z_2 - z_1}{p}$ der Radius des Kreises für diejenigen Punkte, die nur den p^{ten} Theil der größten Helligkeit besitzen.

Will man Stellen bestimmter Helligkeit von dunklern Zonen abscheiden, so darf man nur eine kreisförmig ausgehöhlte Scheibe, welche den Werth νz als Radius des Ausschnitts hat, im Bilde, das entweder durch die x^{te} oder durch eine vorhergehende Fläche bewirkt wird, anbringen, welche Vorrichtung dann Blende oder Diaphragma genannt wird.

Entsteht z. B. zwischen der i und $i + 1^{\text{ten}}$ Linse des Systems ein Bild und es soll hier ein Diaphragma eingesetzt werden, so findet sich als Oeffnung $z\nu_i$, wo ν_i die Vergrößerungszahl des Systems der i ersten Linsen und $\frac{z}{\varepsilon} = \psi$ der bereits bestimmte scheinbare Durchmesser

des Gesichtsfeldes ist. Ist jedoch $\varepsilon = \infty$, wie beim Fernrohr, so geht diese Bestimmungsweise nicht. Aber in diesem Falle entsteht das Bild im Brennpunkt des Systems der i ersten Linsen und es ist dann der Oeffnungshalbmesser des Diaphragmas $= f_i \tan \psi$, wo f_i die hintere Hauptbrennweite des Systems der i ersten Linsen bedeutet; wenn man sich nämlich durch die Hauptpunkte zwei Strahlen, beide zur optischen Axe unter den Winkel ψ gesetzt denkt, wo dann der vordere Strahl durch den Umfang des mit dem Radius z in der unendlich entfernten Gegenstandsebene beschriebenen Kreises, der hintere Strahl dagegen durch das Bild dieses Umfanges geht; so ist die Entfernung des Schnittpunktes des hintern Strahls mit der Brennebene zur optischen Axe $= f_i \tan \psi$.

Würde an einem andern Orte, als da, wo ein Bild entsteht, ein Diaphragma eingesetzt, so ändern sich dadurch die Helligkeitsverhältnisse in ähnlicher Weise, als wie wenn eine neue Linse hingestellt würde. Bedeutet nun hier η die Entfernung des Diaphragmas zur i^{ten} Linse und beziehen sich die Gröfsen v , v_0 , ε' , ε_0 , auf das System der i Linsen, so ergeben sich für m und ω bezüglich der Blende, wie einfach darzuthun ist:

$$(73.) \quad \omega = \frac{v_0 o}{\varepsilon' - \varepsilon_0} (\varepsilon' + \eta) \quad \text{und} \quad m = -vz \left(\frac{\varepsilon_0 + \eta}{\varepsilon' - \varepsilon_0} \right)$$

und hieraus bestimmt sich in gleicher Weise, wie früher, das betreffende $\frac{z}{\varepsilon}$.

Hat man den Verlust der Strahlen an mehreren hinter einander folgenden Tangentialebenen zu bestimmen, so wiederholt man für jede weiter rückwärts gelegene die eben gemachten Schlüsse, indem man stets die Fläche jeder Linse, zu welcher die gerade in Betracht stehende Berührungsebene gehört, als letzte für ein System annimmt, das sie mit den vorhergehenden bildet. Von den hiedurch aufgefundenen z und ϑ nimmt man aus leicht begreiflichen Gründen die kleinsten als solche, die schliesslich zur allerletzten Fläche oder vielmehr zum ganzen Apparat gehören, an.

Die Helligkeit für eine Zone, deren Verlust durch ϑ repräsentirt ist, wird nach der Formel (66) bestimmt.

§. 46.

Soll hinter dem Apparat ein Auge die durch den erstern gegangenen Strahlenkegel aufnehmen, so bringt man es am besten an den Ort, wo sämtliche Axen der einzelnen Kegel die optische Axe nach dem Durchgang durchschneiden, welcher Punkt durch den Werth ε_0 bereits bestimmt ist und der der nämliche ist, von welchem schon am Schlusse des §. 8 die Rede war; denn sämtliche Axen der Strahlenkegel dringen im Axenpunkt der vordern Fläche in den Apparat ein und müssen deshalb nach der Ablenkung durch den Apparat im Bilde dieses Punktes, d. h. im sogenannten Augenpunkt wieder zusammentreffen. Es geht dies indessen nur dann an, wenn der Augenpunkt hinter der letzten Fläche liegt, also ε_0 einen negativen Werth hat. Liegt der Augenpunkt vor der letzten Fläche, so muß man das Auge möglichst nahe an dieselbe bringen, weil die Basen der austretenden Kegel immer gröfser werden und ihre Axen immer weiter seitwärts der optischen Axe treten, je weiter man sie von der letzten Fläche rückwärts auffast. Befindet sich das Auge in Ermangelung eines nutzbaren Augenpunktes unmittelbar an der letzten Fläche, so ist für o' der Halbmesser der wirksamen Augenöffnung zu setzen und die Betrachtung selbst ganz nach dem vorigen §. zu machen. Ist dagegen das Auge im Augenpunkt, so muß man zuvor den Halbmesser $\omega'' = v_0 o$ berechnen, den die Basis der austretenden Kegel auf der im genannten Punkt das Auge tangirenden Ebene hat. Ist $\omega'' \leq y$, (y = Halbmesser der wirksamen Augenöffnung), so erleiden die Kegel beim Eintritt keinen weitem Verlust und sowohl ϑ als auch z bleiben, sowie sie bereits für den Apparat bestimmt wurden. Ist dagegen $\omega'' > y$, so kommt zu dem Verlust, den die Strahlen beim Durchgang durch den Apparat erleiden, noch ein neuer und wenn ersterer durch ϑ , letz-

terer durch $\vartheta' = \left(\frac{y}{\omega''}\right)^2$ repräsentiert wird, so ist dann der Gesamtverlust durch den Coefficient $\vartheta \left(\frac{y}{v_0 o}\right)^2$ auszudrücken.

In allen Fällen erleiden nach §. 43 die einmal in das Auge getretenen Strahlen in diesem keinen weiteren Verlust. Die Zonen werden hier Gesichtsfeld genannt, und man hat also ein Gesichtsfeld von gleicher und grösster und eines von ungleicher allmählich abnehmender Helligkeit.

Für das Gesichtsfeld gleicher und grösster Helligkeit hat man solchergestalt nach (70) für die relative Helligkeit:

$$h' = \frac{\alpha_2 \beta_2 \vartheta_2 o^2 s^2}{\alpha_1 \beta_1 y^2 \varepsilon^2 v'^2}, \dots \dots \dots (74.)$$

wenn die Strahlenkegel eine gleiche oder geringere Breite, als die wirksame Augenöffnung beträgt, in der Ebene des Augenpunktes haben, oder etwa gar kein nutzbarer Augenpunkt vorhanden ist. Wenn dagegen die Breite des Strahlenkegels auf der Ebene eines nutzbaren Augenpunktes grösser als die wirksame Augenöffnung ist, so hat man:

$$h' = \frac{\alpha_2 \beta_2 \vartheta_2 s^2}{\alpha_1 \beta_1 \varepsilon^2} \frac{1}{v'^2 v_0^2} \dots \dots \dots (75.)$$

Ist der Apparat in diesem Falle ein Fernrohr, so ist wegen:

$$v' = \frac{1}{v_0}, \quad h' = \frac{\alpha_2 \beta_2 \vartheta_2}{\alpha_1 \beta_1} \dots \dots \dots (76.)$$

§. 47.

Will man die Formeln auf eine Linse anwenden, so setze man:

$$\varepsilon'_0 = \frac{g g' + f^2}{g}$$

und man erhält sonach leicht die entsprechenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\varepsilon} &\leq + \frac{f}{g g' + f^2} o' - \left(\frac{g'}{g g' + f^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) o \\ \frac{z}{\varepsilon} &\leq - \left\{ \frac{f}{g g' + f^2} o' - \left(\frac{g'}{g g' + f^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) o \right\} \\ \frac{z}{\varepsilon} &> \frac{f}{g g' + f^2} o' - \left(\frac{g'}{g g' + f^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) o \\ \frac{z}{\varepsilon} &\geq \frac{f}{g g' + f^2} o' + \left(\frac{g'}{g g' + f^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right) o. \end{aligned}$$

Beim Stöpselperspektiv muss man die f und g durch die Bestimmungsgrößen der beiden einzelnen Flächen ausdrücken, weil dieser Apparat Fernrohrwirkung hat, man findet alsdann aber leicht:

$$\varepsilon'_0 = \frac{\varrho'}{\varrho} \left(\frac{\varrho - \varrho'}{\nu - 1} \right); \quad \frac{f}{g} = -\frac{\varrho'}{\varrho}; \quad \frac{g'}{g} = -\left(\frac{\varrho'}{\varrho} \right)^2$$

und hiemit als Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\varepsilon} &\leq \frac{\nu - 1}{\varrho - \varrho'} \left\{ (-o') - \left(-\frac{\varrho'}{\varrho} o \right) \right\} \\ \frac{z}{\varepsilon} &\leq -\frac{(\nu - 1)}{\varrho - \varrho'} \left\{ (-o') - \left(-\frac{\varrho'}{\varrho} o \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{z}{\varepsilon} > \frac{\nu-1}{\varrho-\varrho'} \left\{ (-o') - \left(-\frac{\varrho'}{\varrho} o\right) \right\}$$

$$\frac{z}{\varepsilon} \geq \frac{\nu-1}{\varrho-\varrho'} \left\{ (-o') + \left(-\frac{\varrho'}{\varrho} o\right) \right\}.$$

Ist die Dicke einer Linse sehr gering, so ist $g = -f$ und $g' = f$, also $\varepsilon_0 = 0$, somit der Factor auſser der Klammer auf der rechten Seite $= \infty$, weil aber die Gröſſe in der Klammer wegen $o = o'$ auch $= 0$ ist, so ist $\frac{z}{\varepsilon} \leq \frac{0}{0}$, also z ganz unbestimmt und die letzte Bedingung gibt $\frac{z}{\varepsilon} \geq \infty$, d. h. bei einer sehr dünnen Linse gehen alle Strahlen durch.

VIII.

Einige Aufgaben zur Anwendung der wichtigsten Formeln der vorhergehenden Abschnitte.

§. 48.

Weil in unsern Formeln die Dicken nicht enthalten sind, so ist es hier gleichgültig, ob wir sie in Rechnung bringen oder nicht. Da wir aber bereits den Augenapparat schon mit Berücksichtigung der Dicken der Schichten berechnet haben, so wollen wir jetzt solche Linsensysteme annehmen, bei welchen die Dicken nicht in Rechnung gebracht zu werden brauchen, wo also die optische Wirkung einer Linse durch die vordere Hauptbrennweite, die nun mit der gemeinhin sogenannten Brennweite zusammenfällt, vollkommen bestimmt ist, indem hier $f' = -f$, $g' = f$ und $g = -f$ ist. Dürften jedoch die Dicken nicht vernachlässigt werden, so müſten diese drei Gröſſen aus den gegebenen Elementen (den Radien, der Dicke und der Brechungsverhältnisse nach (50)) für die einzelnen Elemente der Linsen zuerst bestimmt werden, dann aber ging die Rechnung geradeso, wie wir sie jetzt darstellen werden, weiter.

§. 49.

Der Tubus einer camera obscura soll in Beziehung auf seine Cardinalpunkte, auf Vergrößerung, Bildweiten, Helligkeitszonen untersucht werden.

Derselbe soll aus zwei convexen Linsen bestehen, die vordere habe die Brennweite 2, die hintere die Brennweite 1. Die Entfernung zwischen beiden sei $= 1$; die Entfernung der Gegenstandsebene sei $= 20$ und die Oeffnungshalbmesser seien bei der ersten Linse $\frac{1}{5}$, bei der andern $\frac{2}{5}$.

Die Daten sind also:

$$f_1 = g'_1 = -2, f'_1 = g_1 = +2, o_1 = \frac{1}{5}, s_1 = 1$$

$$f_2 = g'_2 = -1, f'_2 = g_2 = +1, o_2 = \frac{2}{5}, \varepsilon = 20.$$

Nun ist:

$$x_1 = N_0 = s_1 + g'_1 - g_2 = 1 - 2 - 1 = -2;$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{x_1} = \frac{2}{-2} = -1; f' = -\frac{f'_1 f'_2}{x_1} = +1;$$

$$g = g_1 - \frac{f_1 f'_1}{x_1} = 2 - \frac{-4}{-2} = 0; g' = g'_2 + \frac{f_2 f'_2}{x_1} = -1 - \frac{1}{-2} = -0,5.$$

Der vordere Brennpunkt des ganzen Tubus liegt somit auf der vordern Fläche, der hintere liegt um $\frac{1}{2}$ hinter der hintern Fläche.

Der vordere Hauptpunkt des ganzen Systems liegt um 1 hinter der vordern Fläche, also auf der hintern Fläche, der hintere Hauptpunkt liegt um 1 vor der hintern Fläche. Weil vor und hinter dem Tubus ein und dasselbe Medium liegt, so fallen die Congruenzpunkte mit den Hauptpunkten zusammen. Der vordere Gegenpunkt liegt um 1 vor der vordern und der hintere um 1 hinter der hintern Fläche.

$$\text{Ferner ist } v = \frac{f_1' f_2'}{(\varepsilon - g_1) x_1 + f_1 f_1'} = \frac{2}{-2(\varepsilon - 2) - 4} = -\frac{1}{\varepsilon},$$

d. h. die Vergrößerungszahl ist bei diesem Apparat (wie bei allen, bei welchen

$$f_1' f_2' \dots f_\mu' = N_{\mu-2} \text{ und } g_1 N_{\mu-2} = f_1 f_1' N_{\mu-3}$$

ist) ein reciproker Werth von der Entfernung der Gegenstandsebene und es entsteht also bei allen Strahlen, wo $\varepsilon > 1$ ist, ein verkleinertes und, weil v negativ ist, ein verkehrtes Bild. Da bei uns die Gegenstandsebene die Entfernung 20 hat, so ist $v = -\frac{1}{20} = -0,05$. Auch ist:

$$\varepsilon' = g' - f v = -0,5 - \frac{1}{\varepsilon} = -(0,5 + \frac{1}{\varepsilon}).$$

Es entsteht demnach immer hinter dem Tubus ein Bild von den vor ihm stehenden Gegenständen, bei uns ist $\varepsilon' = -0,55$.

Um diesen Tubus auch noch auf die Helligkeitszonen zu untersuchen, wendet man die Bedingungen (72) an.

Hier ist $\varepsilon'_0 = \infty$; $g = 0$, also muß man den Factor $g \varepsilon'_0$ anderweitig zu bestimmen suchen. Nun war aber $g \varepsilon'_0 = g g' - f f'$ hier also $= -f f' = 1$ und wir haben somit:

$$\frac{z}{\varepsilon} \leq 0,4 - (-0,5 - 0,05) \cdot 0,2 \leq 0,4 - 0,11 \leq 0,29$$

$$\frac{z}{\varepsilon} > 0,29$$

$$\frac{z}{\varepsilon} \leq 0,51.$$

Es liegt daher z zwischen $0,29 \varepsilon$ und $0,51 \varepsilon$ und der Radius des Kreises von der größten gleichen Helligkeit ist im Bild $= 0,29 \varepsilon v = 0,29$ und ebenso ist der Radius der größten Sichtbarkeit $= 0,51$. Die größte Helligkeit selbst aber ist nach (66) $= 0,04 \alpha \beta i$. Ferner ergibt sich, daß der Radius des Kreises, dessen Umfangspunkte im Bilde mit der halben Helligkeit erscheinen $= 0,4$ ist.

Wollte man durch Anbringung einer Blende die Oeffnung der zweiten Linse so verringern, bis die Zone der größten Helligkeit bloß ein Punkt ist, also das Bild von der Mitte gegen den Rand allmählich dunkler werde, so müßte der Radius der Blende

$$o'' = 0,2 \cdot 0,55 = 0,11$$

sein. Die Zone der größten Sichtbarkeit wäre aber dann $= 0,22$. —

§. 50.

Ein Fernrohr bestehe aus zwei Systemen. Das erste System (Objectiv) bestehe aus zwei sich berührenden Linsen, welche also $s = 0$, die Brennweiten $f_1 = -8$, $f_2 = +12$, und die Oeffnungen $o_1 = o_2 = 1$ haben. Das zweite System (Ocular) bestehe aus zwei Linsen mit den Brennweiten $f_3 = -2,25$ und $f_4 = -0,75$, die Entfernung zwischen ihnen sei $s_3 = 1,5$ und sie haben Oeffnungen $o_3 = 0,675$, $o_4 = 0,225$; endlich sei die Entfernung der beiden Systeme $s_2 = 22,875$. Es soll nun die scheinbare Vergrößerung, das Gesichtsfeld und die scheinbare Helligkeit dieses Rohrs berechnet werden. Die Bestimmungsgrößen der beiden Systeme sind nach (41), (42) und (43) zu berechnen:

Für das erste System war:

$$f_1 = -8; f'_1 = +8; g_1 = +8; g'_1 = -8; s_1 = 0,$$

$$f_2 = +12; f'_2 = -12; g_2 = -12; g'_2 = +12; x_1 = 4,$$

$$\text{also ist: } F_1 = -24; F'_1 = +24; G_1 = +24; G'_1 = -24.$$

Es kann somit das erste System wie eine Linse angesehen werden.

Für das zweite System war:

$$f_3 = -2,25; f'_3 = 2,25; g_3 = 2,25; g'_3 = -2,25; s_3 = 1,5,$$

$$f_4 = -0,75; f'_4 = 0,75; g_4 = 0,75; g'_4 = -0,75; x = -1,5,$$

$$\text{also ist: } F_2 = -1,125; F'_2 = 1,125; G_2 = -1,125; G'_2 = -0,375.$$

Die Bedingung für Fernrohrwirkung $S + G'_1 - G_2 = 22,875 - 24 + 1,125 = 0$ ist erfüllt.

Die scheinbare Vergrößerungszahl ist nach (59) $= \frac{F'_1}{F_2} = -21,33 \dots$

Es erscheinen daher die Gegenstände dem Auge umgekehrt und $21\frac{1}{3}$ mal (linear) vergrößert. Für die Helligkeit des Objectiv-Systems brauchen wir die Untersuchung nicht speciell zu führen, da für dieses, weil es wie eine Linse wirkt, z jedenfalls sehr groß ausfällt.

Für das Objectivsystem und die vordere Linse des Ocularsystems, zusammen als ein System behandelt, findet sich einfach nach Früherem:

$$F_3 = -16, F'_3 = +16, G_3 = -146,67, G'_3 = -0,75.$$

G'_3 ist die Entfernung des Bildes von der hintersten Linse, indem hier $\varepsilon' = G'_3$ ist, also liegt jenes in der Mitte der beiden Ocularlinsen.

Ferner ist für dieses System $\varepsilon'_0 = G' - \frac{FF'}{G} = -2,495$.

Defshalb hat man als Bedingungen:

$$\text{die erste ist: } \frac{z}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon'_0 G_3} ((F_3 o') - (G'_3 o)) = \tan \psi_1; \psi_1 = 1^\circ 34' 23'';$$

$$\text{die letzte ist: } \frac{z}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon'_0 G_3} ((F_3 o') + (G'_3 o)) = \tan \psi_2; \psi_2 = 1^\circ 48' 28''.$$

Hier ist ψ_1 der scheinbare Halbmesser der gleichen und größten Helligkeit und ψ_2 der Halbmesser der größten Sichtbarkeit überhaupt, aber nur für das System ohne die hintere Ocularlinse.

Für die Untersuchung des Gesichtsfeldes des ganzen Systems hat man, weil der Apparat ein Fernrohr ist:

$$\varepsilon'_0 = G'_2 - G_1 \frac{F_2 F'_2}{F_1 F'_1} = -0,375 - \frac{24 \cdot 1,125^2}{24 \cdot 24} = -0,428,$$

$$\text{ferner: } \frac{F}{G} = -\frac{F_2}{F'_1} = \frac{1,125}{24} = 0,047, \quad \frac{G'}{G} = -\frac{F_2 F'_2}{F_1 F'_1} = -0,002, \text{ hieraus folgt:}$$

$$\frac{z}{\varepsilon} \leq \frac{1}{0,428} (0,047 \times 0,225 - 0,002) \leq \frac{0,009}{0,428},$$

$$\frac{z}{\varepsilon} \geq \frac{1}{0,428} (0,047 \times 0,225 + 0,002) > \frac{0,013}{0,428}.$$

Für das ψ der größten Helligkeit erhält man defshalb den scheinbaren Halbmesser $1^\circ 12' 16'' = \psi_1$ und für das der Sichtbarkeit überhaupt $\psi_2 = 1^\circ 44' 22''$. Da diese ψ kleiner sind, als die vorher gefundenen, so gelten sie für die ψ des gegebenen Fernrohrs. Der Halbmesser der Strahlenkegel auf der Ebene, die durch den Augenspunkt geht, ist nach §. 46 $\omega'' = v_0 o$.

Beim Fernrohr ist $v_0 = \frac{F'_2}{F_1} = \frac{1}{v'} = 0,047$; also sind die Strahlenkegel breiter, als die wirksame Augenöffnung, diese $= 0,03$ angenommen, und es entsteht beim Eintreten der Strahlen

in das Auge ein neuer Verlust. Aus diesem Grunde ist nach (76) die relative Helligkeit $= \frac{\alpha_2 \beta_2 \vartheta}{\alpha_1 \beta_1}$ und die für das Gesichtsfeld der größten Helligkeit $= \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1}$. Für die Zonen der halben Helligkeit haben wir die scheinbaren Halbmesser $\psi_3 = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = 1^\circ 28' 19''$. In die Mitte zwischen die zwei Linsen des Ocularsystems kann man eine Blende einsetzen, da dort ein wirkliches Bild entsteht; der Halbmesser derselben beträgt $F'_3 \tan \psi$, ist also:

Für das ganze Gesichtsfeld: 0,45.

Für das Gesichtsfeld bis zur halben Helligkeit: 0,39.

Für das Gesichtsfeld der gleichen und größten Helligkeit: 0,34.

§. 51.

Bei einem Fernrohr (Kometensucher), für welches man ein großes Gesichtsfeld neben geringer Vergrößerung wünscht, verträgt auch das Objectiv eine verhältnismäßig größere Oeffnung. Nehmen wir an, es gelte für das nämliche Ocular-System nun ein Objectiv-System von 12 Brennweite und dem Oeffnungshalbmesser 0,83, so hat man für das erste System:

$$F_1 = -12, F'_1 = +12, G_1 = +12, G'_1 = -12; o_1 = 0,83;$$

vordere Ocularlinse:

$$f_2 = -2,25; f'_2 = +2,25; g_2 = +2,25; g'_2 = -2,25; o_2 = 0,675; s_1 = 0;$$

zweite Ocularlinse:

$$f_3 = -0,75; f'_3 = +0,75; g_3 = +0,75; g'_3 = -0,75; o_3 = 0,225; s_2 = 10,875;$$

das Ocularsystem selbst hat also:

$$F_2 = -1,125; F'_2 = +1,125; G_2 = -1,125; G'_2 = -0,375; s_3 = 1,5;$$

Das System aus dem Objectiv und der ersten Ocularlinse:

$$F_3 = -8; F'_3 = +8; G_3 = -30,66; G'_3 = -0,75.$$

G'_3 ist die Entfernung des Bildes, welches durch dieses System von einem sehr entfernten Gegenstand erzeugt wird, und es liegt dasselbe wieder in der Mitte zwischen den beiden Ocularlinsen:

Für dieses System hat man ferner $\epsilon_0 = -2,837$.

$$\frac{z}{\epsilon} \leq \frac{1}{g \epsilon_0} ((f o') - (g' o)) \leq 0,05492, \text{ also } \psi_1 = 3^\circ 8' 36''.$$

$$\frac{z}{\epsilon} \geq \frac{1}{g \epsilon_0} ((f o') + (g' o)) \geq 0,06924, \text{ also } \psi_2 = 3^\circ 57' 36''.$$

Für das ganze Fernrohr hat man: $v' = \frac{F_1}{F_2} = -10,66$, ferner ist:

$$\epsilon'_0 = G'_2 - G_1 \frac{F_2 F'_2}{F_1 F'_1} = -0,48; -\frac{F_2 o'}{F'_1} = 0,02109; -\frac{F_2 F'_2 o}{F_1 F'_1} = -0,00731.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{z}{\epsilon} \leq 0,0255; \psi_1 = 1^\circ 38' 39''.$$

$$\frac{z}{\epsilon} \leq 0,0621; \psi_2 = 3^\circ 23' 22''.$$

Weil die letztern ψ die kleinern sind, so gelten sie für den Apparat selbst. Die austretenden Strahlen haben ferner in der Ebene des Augenpunkts den Halbmesser:

$v_0 o = \frac{o}{v} = 0,078$, also $> 0,03$, d. h. gröfser als die wirksame Augenöffnung und es treten nicht alle Strahlen, die aus dem Fernrohr kommen, in das Auge.

Die relative Helligkeit ist somit nach (76):

$$h' = \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1} \vartheta.$$

§. 52.

Es ist ein System von vier Linsen, die in nachstehender Weise zusammengestellt sind, auf seine Wirkung zu untersuchen:

Für die erste Linse ist: $f_1 = -16$, $o_1 = 2,5$.

" " zweite " " $f_2 = -26$, $o_2 = 2,5$ $s_1 = 16$.

" " dritte " " $f_3 = -58$, $o_3 = 10$, $s_2 = 124$.

" " vierte " " $f_4 = -34,9$, $o_4 = 6,5$ $s_3 = 52,9$.

Verbindet man sämtliche Linsen zu je zwei Systemen, so oft es angeht und sucht die betreffenden x , so findet man, weil keines der letztern der Null gleich ist, als Zeichen, dafs der vorgelegte Apparat kein Fernrohr sein kann, und wir betrachten ihn defswegen als Mikroskop.

Die zwei vordern Linsen zu einem System vereinigt bilden das Objectiv des Mikroskops und die hintere das Ocular. Das System

der zwei ersten Linsen hat: $F_1 = -13$, $F'_1 = +13$, $G_1 = +5$ und $G'_1 = +7,8$.

" drei " " $F_2 = +10,22$, $F'_2 = -10,22$, $G_2 = +7,29$ und $G'_2 = -103,58$.

Das System aller Linsen hat: $F = +4,17$, $F' = -4,17$, $G = +6,07$ und $G' = -20,67$.

Aus diesem folgt, wenn die kürzeste deutliche Sehweite 200 beträgt, die Entfernung der Objecte vom Objectiv $\varepsilon = 5,99$ und $v = -52$.

Ferner findet man

beim erstem System: $\frac{z}{\varepsilon} \leq 0,16735$ und $\geq 0,47985$

und es wird hier die zweite Bedingung erfüllt, was anzeigt, dafs die durch die erste Linse gekommenen Strahlenkegel, die Oeffnung der zweiten zwar ausfüllen können, aber weil sie gröfsere Basishalbmesser haben, als die Oeffnung der zweiten Linse beträgt, treten sie unvollständig durch.

Für das zweite System ist:

$$\frac{z}{\varepsilon} \leq 0,1377 \text{ und } \geq 0,1765$$

und dabei wird die erste Bedingung erfüllt.

Für das dritte System ist:

$$\frac{z}{\varepsilon} \leq 0,1903 \text{ und } \geq 0,3111$$

und der ersten Bedingung wird auch hier Genüge geleistet. Hieraus hat man für das Gesichtsfeld gleicher und gröfster Helligkeit:

$$\tan \psi_1 = 0,1377, \psi_1 = 7^\circ 50' 25'', z_1 = \varepsilon \tan \psi_1 = 0,824$$

und für das der Sichtbarkeit überhaupt:

$$\tan \psi_2 = 0,1765, \psi_2 = 10^\circ 0' 39'', z_2 = \varepsilon \tan \psi_2 = 1,057.$$

Der Strahlenkegel fällt nach (71) auf die zweite Linse mit dem Basis-Halbmesser $= 5,178$ und auf das Auge, wenn es sich dicht hinter der letzten Linse befindet, mit dem Halbmesser $= 1,819$. In Folge dieser Umstände und $y = 0,9$ gesetzt, ist das ϑ für das Gesichtsfeld

gröfster Helligkeit beinahe $\frac{1}{16}$ und die relative Helligkeit nach (67) $= 0,198 \frac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1}$.

In J. Ludw. Schmid's Verlag in Nürnberg ist erschienen:

Dr. Ad. Weifs,

Handbuch der Trigonometrie,

gr. 8^o. Vorr. XII., 462 Seiten. Preis: Thlr. 1. 10 Ngr. oder Fl. 2. 24 kr.

Es gibt wohl kaum ein Werk, in welchem dieser Theil der Mathematik so gründlich und umfassend behandelt wird, als in dem oben angezeigten Buche. Dabei sind viele Kapitel ganz originell abgehandelt und enthalten häufig neue Resultate. In dem Anhange befindet sich eine große Anzahl von Tabellen und Uebungsaufgaben. Wohl möchte deshalb das Urtheil eines der ersten deutschen Mathematiker in den Heidelberger Jahrbüchern der Literatur gerechtfertigt erscheinen, wo es am Schlusse heisst: „Vorliegendes Werk nimmt eine ehrenvolle Stelle in der Literatur dieses Zweiges der Mathematik ein und Lehrer wie Lernende werden dasselbe mit vieler Befriedigung benützen.“ —

Paul Wolfgang Häcker,

Zur Theorie des Magnetismus,

gr. 8^o. 254 Seiten. Preis: Thlr. 2. — oder Fl. 3. 30 kr.

Die Erscheinungen des Magnetismus sehen trotz der mit herrlichem Erfolge gekrönten Bemühungen von Gauss und trotz der von andern der besten Naturforscher erhaltenen Resultate immer noch einer bündigen Erklärung entgegen. Zumeist fehlte es bis jetzt an rationell und vielseitig angestellten Versuchen. In der angezeigten Schrift veröffentlicht nun der durch seine Gesetze über Tragfähigkeit der Magnete so wie durch die Anfertigung von starken Magneten bereits rühmlich bekannte W. Häcker eine Reihe ganz neuer Versuche mit den merkwürdigsten oft sich geradezu widersprechenden Resultaten, welche er aber durch Anwendung einfacher elementarer mathematischer Sätze in einer Weise zu erklären weis, daß dadurch das Wesen des Magnetismus faßbarer erscheint, namentlich gilt dieses in Beziehung auf das wichtigste Kapitel von den Schwingungen aufgehängter Magnetstäbe, worüber sich das Buch ausführlich verbreitet und wo es erkennen läßt, daß die aus den bisherigen Untersuchungen gemachten Schlüsse über den tellurischen Magnetismus einer bedeutenden Modification bedürftig sind.

Aus diesem Allen möchte nun die Nothwendigkeit, sich mit der angezeigten Schrift vertraut zu machen, für jeden Physiker satksam hervorgehen.

Weiss, Adam,

Die Elemente der analytischen Dioptrik

Nürnberg 1857

4 Math.a. 321 p

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10053172-1